دوفصلنامهٔ هیدروفیزیک

دورهٔ ششم، شمارهٔ دوم (پاییز و زمستان ۱۳۹۹)؛ صفحات: ۳۹-۲۵

مقالهٔ پژوهشی

DOR:20.1001.1.24767131.1399.6.2.4.0

درصد همانندی:۱۶٪

شناسایی منبع آلاینده با حل تحلیلی معادلهٔ انتقال آلودگی به‌صورت معکوس در زمان

عرفان پرمنون[۱]، مهدی مظاهری[۲]*

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه سازه‌های آبی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران p.erfan@modares.ac.ir

*[۲] نویسندهٔ مسئول، استادیار گروه سازه‌های آبی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران m.mazaheri@modares.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰٤/۰۵ **تاریخ پذیرش:** ۱۳۹۹/۰۸/۱۷

چکیده

با وجود قوانینی درزمینهٔ عدم تخلیه پساب به منابع آبی همواره تخلفاتی در جهت تخلیه آن وجود خواهد داشت. ازاین‌رو، شناسایی منبع آلاینده (سری زمانی) اهمیت ویژه‌ای دارد. آلودگی واردشده به رودخانه با فرآیند جابه‌جایی-پراکندگی به پایین‌دست منتقل می‌شود. این معادله در گام زمانی مثبت با استفاده از روش‌های عددی و تحلیلی متداول قابل حل است. در حل مستقیم، سری زمانی در بالادست مشخص است و هدف، یافتن غلظت آلاینده در مکان و زمان پایین‌دست است. اما در حل معکوس هدف عکس حل مستقیم است. حل معکوس این معادله به‌صورت گام زمانی منفی در دسته معادله‌های دیفرانسیلی جزئی بدخیم قرار می‌گیرد و پاسخ‌های این معادله به همگرایی لازم نمی‌رسند؛ ازاین‌رو، از روش شبه‌معکوس‌پذیری استفاده می‌شود. اساس این روش اضافه نمودن ترم پایداری است که نقش اصلی را در همگرایی پاسخ‌های معکوس معادله جابه‌جایی-پراکندگی بر عهده دارد. در گام بعد معادله جابه‌جایی-پراکندگی به‌علاوه ترم پایداری، با تبدیل فوریه حل می‌شود که به یک انتگرال نوسانی شدید خواهد انجامید. حل این انتگرال شناسایی منبع آلاینده را در پی دارد. مدل بیان‌شده در الگوهای ساده بسیار دقیق عمل می‌کند و در الگوهای پیچیده‌تر با افزایش ضریب پایداری می‌توان میزان خطا را تا حدود زیادی کاهش داد، از طرفی مدل معکوس نسبت به مدل عددی هزینه محاسباتی کمتری دارد. برای حل مدل معکوس از دو مثال فرضی(ساده و پیچیده) استفاده شد که صحت سنجی با نتایج عددی حاکی از توانایی بالای مدل تحلیلی است.

واژه‌های کلیدی: انتقال آلودگی، روش شبه‌معکوس‌پذیری، حل تحلیلی، مدل معکوس، تبدیل فوریه

۱. مقدمه

آب تاریخ تمدن و محور تحولات مهم سیاسی-اجتماعی است. از طرفی آب سطحی یکی از مهم‌ترین مؤلفه‌های چرخه هیدرولوژیک است. باید مدنظر داشت که حفاظت از این منابع باارزش در برابر آلودگی بسیار بااهمیت است. رودخانه‌ها یکی از مهم‌ترین منابع آب سطحی هستند، اغلب صنایع در مجاورت آن‌ها قرار دارند و در معرض آلودگی هستند. گزارش‌ها حاکی از آن است که ۷۵ تا ۸۰ درصد آلودگی‌ها ناشی از فاضلاب خانگی است، همچنین مواد زائد همچون صنایع شکر، نساجی، آبکاری، سموم و خمیرکاغذ باعث ایجاد آلودگی می‌شوند [۱]. هرچند مقرراتی برای محدود کردن صنایع در رهاسازی آلاینده به رودخانه‌ها وجود دارد، اما وجود چنین مقرراتی به‌تنهایی راهکار حل مشکل نیست و ممکن است که برخی صنایع قوانین را نادیده بگیرند و میزان قابل‌توجهی آلاینده را به‌صورت ناگهانی یا حتی نامحسوس وارد رودخانه کنند. بر اساس گزارش اداره حفاظت محیط‌زیست ایالات‌متحده، ۲۰ درصد آلاینده‌های موجود در منابع آبی در این کشور از یک منبع ناشناخته وارد شده است [۲]. این در حالی است که آمار در کشورهای درحال‌توسعه می‌تواند بسیار نگران‌کننده‌تر باشد. اما بدیهی است که حتی با وضع قوانین مهم و کاربردی باز هم ورود غیرمجاز آلاینده‌ها از مراکز تولید آن غیر قابل کنترل است. دو رویکرد کلی از دیدگاه گام زمانی وجود دارد:

۱- حل مستقیم با گام زمانی مثبت که با معلوم بودن تابع شدت آلاینده در منبع با محاسبه مقدار غلظت در مکان و زمان پایین‌دست پرداخته می‌شود،۲- حل معکوس با گام زمانی منفی که با معلوم بودن غلظت در مکان و زمان پایین‌دست به شناسایی تابع شدت آلاینده در بالادست پرداخته می‌شود که در این حالت می‌توان به شناسایی آلاینده غیرمجاز اقدام نمود و تدابیر پیشگیرانه را انجام داد.

ازاین‌رو برای شناسایی الگوی انتشار آلاینده‌ها در رودخانه نیاز به حل معکوس دارد. روش‌های شناسایی منبع آلاینده در زمینهٔ حل معکوس به سه حالت کلی طبقه‌بندی می‌شوند [۳].

۱. ارائه رابطه برای حل معکوس بر اساس مسئله شبیه‌سازی-بهینه‌سازی[۱]،

۲. استفاده از روش‌های احتمالاتی و ژئواستاتیستیک[۲]،

۳. حل معکوس با روش‌های ریاضی[۳].

در حالت اول با تغییر در پارامترهای تصمیم مسئله (مکان و شدت منابع آلاینده) و استفاده از فرایند تکرار سعی بر حداقل نمودن اختلاف بین مقادیر محاسباتی و مشاهداتی است. حالت دوم بر اساس روش‌های آماری، توزیع احتمالاتی و علم ژئواستاتیستیک سعی در به حداقل رساندن تعداد تکرار در مقایسه با روش شبیه‌سازی-بهینه‌سازی دارد. در حالت سوم هدف یافتن مجهولات به صورت معین و در چارچوب ریاضی است. به عبارت بهتر معادله‌های مدل معکوس شامل مجهولات مسئله استخراج می‌شود و در گام بعد معادله‌ها حل خواهد شد. باید توجه داشت که حل معادله‌ها به صورت معکوس اغلب در دستهٔ معادله‌های بدخیم قرار می‌گیرند و معادلهٔ جابه‌جایی-پراکندگی از این امر مستثنی نیست.

معادله به‌کار رفته در حوزه انتقال جرم در رابطه با رودخانه‌ها معادلهٔ جابه‌جایی-پراکندگی[۴] است که یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی سهموی[۵] است که از ترکیب معادله پیوستگی و قانون اول فیک[۶] به‌دست می‌آید. آلودگی تخلیه شده در رودخانه‌ها با فرایند جابه‌جایی-پراکندگی به پایین‌دست منتقل می‌شود. این معادله در حالت متداول و به صورت گام زمانی مثبت با روش‌های معمول عددی و تحلیلی قابل حل است [۴]. در حل مستقیم این معادله یا به عبارتی با گام زمانی مثبت تابع شدت منبع آلاینده مشخص و مجهول مسئله، غلظت در مکان و زمان موردنظر است. اما زمانی که آلودگی در بالادست رودخانه تخلیه می‌شود برای شناسایی تابع شدت آلاینده نیاز است تا معادله جابه‌جایی-پراکندگی به صورت گام زمانی منفی حل شود، تا بتوان تابع شدت منبع آلاینده در بالادست را شناسایی کرد، به‌عبارت‌دیگر در حالت حل معادله با گام زمانی منفی غلظت آلاینده در پایین‌دست مشخص است (اندازه‌گیری غلظت به‌وسیله ایستگاه سنجه) و هدف یافتن تابع شدت منبع آلاینده است. اما معادله جابه‌جایی-پراکندگی با گام زمانی منفی یا به‌صورت معکوس در دسته معادله‌های بدخیم دیفرانسیلی[۷] قرار می‌گیرد و پاسخ‌ها به همگرایی لازم

نمی‌رسد و با روش‌های معمول قابل‌حل نیست. روش شبه‌معکوس‌پذیری روشی برای حل معادله‌های دیفرانسیلی جزئی بدخیم است، در این روش با استفاده از ترم پایداری از درجه بدخیمی معادله کاسته می‌شود و سبب همگرایی در پاسخ‌های معادله دیفرانسیل موردنظر خواهد شد. ازاین‌رو روش شبه‌معکوس‌پذیری[8](QR) با توجه به نکاتی که در بالا اشاره شد برای بازسازی تابع شدت غلظت آلاینده با توجه به معلوم بودن نقطه ورودی آلاینده، مورداستفاده قرار می‌گیرد.

اصول فیزیکی و ریاضی حاکم بر انتقال جرم و انتقال حرارت مشابه است و ارتباط نزدیکی بین حل معکوس در رابطه با معادله انتقال حرارت و انتقال جرم وجود دارد. هر دو معادله از نوع معادله دیفرانسیل جزئی سهموی هستند و در گام زمانی منفی جهت شناسایی منبع در دسته معادله‌های دیفرانسیل جزئی بدخیم قرار خواهند گرفت. درزمینهٔ انتقال حرارت هدف از حل معادلهٔ گرما یافتن منبع تولید گرما در دامنهٔ موردنظر است، در معادلهٔ انتقال جرم هدف یافتن منبع آلاینده با استفاده از اندازه‌گیری کمیت غلظت در دامنه موردنظر است. روش‌های حل مسائل معکوس در دهه‌های اخیر به سبب کاربردهای این مسائل در علوم پایه، مهندسی، فیزیک و... رشد قابل‌توجهی داشته است که در این زمینه می‌توان به انتقال حرارت توسط لتس و لیون در سال ۱۹۶۹ اشاره کرد که پیشنهاد روش شبه‌معکوس‌پذیری را برای حل معادله‌های دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرمعکوس‌پذیر در زمان را دادند. استراتژی روش QR جلوگیری از حل معادله غیرمعکوس‌پذیر و به‌جای آن حل معادله‌ای نزدیک به معادله اصلی با گام زمانی منفی است. آن‌ها معادله پخش را با زمان معکوس با جایگزینی کاربر پخش با QR حل کردند [۵] . دورا و رایو در سال ۱۹۹۹ روش شبه‌معکوس‌پذیری را برای حل معادلهٔ جانبی گرما که معادله‌ای دیفرانسیلی جزئی بدخیم است، ارائه دادند و با قرار دادن محدودیتی در شرایط مرزی ثابت کردند، اگر شرایط مرزی محدود شده به اندازه کافی دقیق باشد، حل معکوس با روش شبه معکوس‌پذیری دقیق است [۶]. اسماعیل‌زاده و همکاران در سال ۲۰۰۹ مسئله انتقال گرما را در حالت سه‌بعدی با استفاده از روش شبه‌معکوس‌پذیری شبیه‌سازی کردند. مدل دینامیک با معادله استوکس به‌دست آمد و نیز سیال را غیرقابل تراکم در نظر گرفتند. برای حل معادله از روش عددی المان محدود استفاده کردند و یک الگوریتم پیشنهادی برای رایانه‌های موازی ایجاد کردند و در انتها با قیاس نتایج آزمایشگاهی با نتایج عددی دریافتند که روش شبه‌معکوس‌پذیری یک روش دقیق برای حل مسائل معکوس است [۷]. ژیانگ و همکاران در سال ۲۰۰۶ روش تفاضلات مرکزی و شبه معکوس‌پذیری را برای حل معادله هدایت گرما به صورت برگشتی به‌کار بردند. همچنین نقش پارامترهای تنظیم‌کننده را در هر دو روش مورد آزمون قرار دادند که حاکی از مؤثر بودن پارامترهای تنظیم در هر دو روش ازجمله شبه‌معکوس‌پذیری است [۸]. گیان و ماو در سال ۲۰۱۱ روش شبه معکوس‌پذیری را برای حل معکوس معادله انتقال حرارت پیشنهاد دادند. پارامتر تنظیم در روش شبه‌معکوس‌پذیری را با استفاده از خطاهای مختلف مورد آزمون قرار دادند، نتایج بیان‌گر مؤثر بودن روش QR در شبیه‌سازی نتایج بود [۹]. در ادامه تحقیقات انجام گرفته درزمینهٔ انتقال جرم می‌توان به انتقال آلاینده در آب‌های زیرزمینی توسط اسکاگس و کابالا در سال ۱۹۹۵ اشاره نمود که در نتیجه‌گیری کلی اعلام شد که روش شبه‌معکوس‌پذیری برای حل معادله جابه‌جایی-پراکندگی به‌صورت معکوس در زمان با ضرایب متغیر کارآمد است [۱۰]. لیو و بال در سال ۲۰۰۱ روش ارائه شده توسط اسکاگز و کابالا را برای داده‌های واقعی به کار بردند. نتیجه تحقیق آن‌ها حاکی از آن بود که حل معکوس معادله‌های انتقال می‌توانند به‌عنوان یک ابزار مفید در چاره‌جویی برای سفره‌های آب زیرزمینی آلوده‌شده به کار رود [۱۱]. بگتزگلو و اتمادجا در سال ۲۰۰۱ مقایسه‌ای بین روش معکوس و شبه‌معکوس‌پذیری برای بازسازی توزیع مکانی غلظت آلاینده ارائه دادند، که روش شبه‌معکوس‌پذیری در مواردی که محیط متخلخل ناهمگن باشد، ضعیف عمل کرده اما در مواردی که پارامترها همگن و داده‌های اولیه دارای عدم قطعیت هستند، بسیار کارآمد است [۱۲]. ژانگ و وانگ در سال ۲۰۱۲ منبع آلودگی ذرات را با دو روش شبه‌معکوس‌پذیری و تخمین محل منبع آلاینده[9]

با روش لاگرانژ برگشتی شناسایی کردنـد، ایـن دو روش در یک کابین محصور مورد آزمون واقع شدند که هـر دو روش منبع را در یک نقطه به‌طور دقیق شناسایی کردند [۱۳]. یانگ در سال ۲۰۱۴ شناسـایی منبـع ناشـناخته را بـرای یـک معادلـهٔ پخشیدگی ذرات موردمطالعه قرار داد، معادلهٔ مورداستفاده او از معادلات دیفرانسیل جزئی بدخیم بـود، کـه در ایـن مسـائل تغییر کوچکی در داده‌های انـدازه‌گیـری شـده بسیار بـر حـل آن‌ها تأثیرگذار است، روش منظم شبه‌معکـوس‌پـذیری بـرای حل این نوع مسائل به کـار بـرده شـد و درنهایـت نمونـه‌هـای عددی نشان دادنـد روش مـنظم شـبه‌معکـوس‌پـذیری مـؤثر و پایدار است [۱۴]. ژانگ و چن در سال ۲۰۰۷ برای محافظت از سرنشینان در برابر عوامل عفونی و شیمیایی در یـک حملـه تروریستی شبیه‌سازی شده جریان را در یک محیط بسته انجام دادند. آن‌ها معادلهٔ انتشار را به‌صورت معکوس در زمان بـا دو روش شبه‌معکوس‌پذیری و شبه‌برگشـت‌پـذیری حـل کردنـد. روش شبه‌معکوس‌پذیری با اضـافه نمـودن تـرم مشـتق چهـارم معادله انتشار را به‌صورت معکـوس در زمـان حـل مـی‌کنـد و روش شبه‌برگشـت‌پـذیری بـا اسـتفاده از روش عـددی و تـابع چگالی احتمال حل موردنظر را انجام می‌دهد. درنهایت به این نتیجـه رسـیدند کـه روش شـبه‌معکـوس‌پـذیری از روش شـبه‌برگشـت‌پـذیری دقیـق‌تـر اسـت، امـا زمـان محاسـباتش طولانی‌تر است [۱۵]. بـاروس و کلبـروک در سـال ۲۰۱۹ بـا اسـتفاده از روش تبـدیل متحـده (فوکـاس) بـه حـل معادلـهٔ جابه‌جایی-پراکندگی با شرایط مرزی دیریشله پرداختنـد کـه مزیت اصلی این روش دقت و سـرعت در محاسـبات، امکـان ایجاد یک راه‌حل به‌صورت یکنواخـت در مرزهـا و از طرفـی آن را به‌صورت مستقیم و عددی می‌توان به‌کار برد. آن‌هـا بـه این نتیجـه رسـیدند کـه تبـدیل فوکـاس مـی‌توانـد محاسـبات مؤثری در زمان‌های بزرگ انجام داده که نیازی به جداسـازی بازهٔ زمانی ندارد [۱۶].

قانع و همکاران در سـال ۲۰۱۶ روش احتمـال برگشـتی بـرای شناسایی منبع آلودگی در آب‌های زیرزمینـی بـرای شناسـایی محل منبع آلاینده و زمان انتشار آلاینده در رودخانـه بـه کـار بردند. آن‌ها معادله‌ای به‌صورت بازگشتی بـا اسـتفاده از یـک روش آنـالیز حساسیت اسـتخراج کردنـد، سپس مـدل را بـا اسـتفاده از راه‌حـل‌هـای تحلیلـی و برخـی از داده‌هـای واقعـی توسعه دادند. روش پیشنهادی، دقیق، محاسباتی و کارآمد بود و در هندسـه رودخانـه و جریـان هـیچ سـاده‌سـازی صـورت نگرفت. بـر همـین اسـاس ایـن روش را بـرای اهـداف عملـی توصیه کردند [۱۷]. مظاهری و همکاران در سال ۲۰۱۵ بـرای تعیین سهم آلودگی هر منبع آلاینـده در رودخانـه یـک مـدل ریاضی برای تعیین مکان‌ها و سری زمـانی بـا اسـتفاده از یـک نقطه اندازه‌گیـری در پـایین‌دسـت ارائـه کردنـد. حـل معادلـه جابه‌جایی-پراکندگی بـه‌صـورت یـک‌بعـدی در قالـب یـک مسئله معکوس بررسی شد. حل معادله با استفاده از تابع گرین یـک معادلـه انتگرالـی را نتیجـه شـد کـه گسسـته‌سـازی ایـن انتگرال به یک سیستم خطی بدخیم منجر می‌شود و برای حل آن از تیخونوف تنظیم شده استفاده کردند. درنهایت نتـایج بـا داده‌های واقعـی حـاکی از دقـت قابل‌قبـول مـدل بـود [۱۸]. اغلب پژوهش‌ها درزمینهٔ شناسایی منبـع آلاینـده در آب‌هـای زیرزمینی انجام شده است و شناسـایی در خصـوص آب‌هـای سطحی انـدک اسـت، ایـن تحقیقـات اکثـراً بـه‌صـورت حـل عـددی موردبررسـی واقـع شـده‌انـد. بـه‌صـورت کلـی حـل معادله‌های دیفرانسیل به دو صورت تحلیلـی و عـددی ممکـن است. اگر امکان حل تحلیلی و عددی در یـک مسئله وجـود داشـته باشـد، حـل تحلیلـی ارجحیـت دارد. از مزایـای روش تحلیلی در یک مسئله خاص عمومیت آن برای مسـائل مشابه است درحالی‌که روش عـددی در حـل مسـائل دارای روشـی منحصربه‌فرد است بدین معنی که قابل‌تعمیم برای سایر مسائل مشابه نیست. نکته قابل‌توجه دیگر این اسـت کـه در رابطـه بـا الگوریتم و صحت سنجی حل عددی نمی‌توان بیش‌ازحـد بـه رایانـه اعتمـاد داشـت [۱۹]. عـلاوه بـر مـوارد گفتـه شـده، در روش‌هـای تحلیلـی بـرخلاف روش‌هـای عـددی، محدودیت‌هایی چون انتخاب گام زمـانی و مکـانی مناسـب و شرط همگرایی وجود ندارد، از سوی دیگر روش‌های عددی همواره دارای خطـا هسـتند، درحـالی‌کـه روش‌هـای تحلیلـی کـاملاً دقیـق هسـتند و بـه‌عنـوان یـک معیـار ارزشـمند در صحت‌سـنجی پاسـخ عـددی معادلـه‌هـای دیفرانسـیل مـورد استفاده قرار می‌گیرند [۲۰]. محبوبیت گسترده تبـدیل فوریـه[۸]

به دلیل کارایی این ابزار در حیطهٔ مهندسی و علمی است و می‌تواند راه‌حل‌هایی ساده برای حل مسائل موجود ارائه نماید. تبدیل فوریه یک ابزار ریاضی قدرتمند است که قادر است هر تابع را به مجموع توابع سینوسوئیدها[9] (موج سینوسی و کسینوسی) تجزیه کند که هر یک از توابع پایه‌ای (سینوسی یا کسینوسی) به‌عنوان یک تابع نمایی پیچیده از فرکانس‌های مختلف بیان می‌کند. بسیاری از پدیده‌های موجود در طبیعت با گذشت زمان در دامنه‌هایی در حال تغییر و تحول هستند که حدود تغییرات آن‌ها نامحدود یا نیمه‌محدود به نظر می‌رسد. به همین دلیل استفاده از تبدیل فوریه که دارای حدود نامحدود است یک تکنیک قدرتمند تحلیلی برای حل معادله‌های دیفرانسیل خطی در حیطهٔ مهندسی و علمی است. هدف از این تحقیق شناسایی منبع آلاینده با استخراج راه‌حل تحلیلی با روش شبه‌معکوس‌پذیری برای معادله جابه‌جایی-پراکندگی به‌صورت معکوس در زمان و در حالت یک‌بعدی است. پس از افزودن ترم پایداری حل تحلیلی معادله جابه‌جایی-پراکندگی به‌علاوه ترم پایداری انجام خواهد گرفت. حل تحلیلی با استفاده از روش تبدیل فوریه برای معادله جابه‌جایی-پراکندگی به‌علاوه ترم پایداری (ترم حاصل از روش شبه‌معکوس‌پذیری) تأثیر بسزایی در نزدیک نمودن نتایج به واقعیت دارد و نسبت به سایر روش‌های موجود هزینه و زمان کم‌تری برای شناسایی منبع آلاینده خواهد داشت. حل تحلیلی معادله جابه‌جایی-پراکندگی به‌صورت معکوس در زمان با روش شبه‌معکوس‌پذیری برای اولین بار در این مقاله موردبررسی قرار گرفته است.

۲. مبانی تئوری

در این بخش ابتدا معادله مستقیم انتقال آلودگی معرفی می‌شود. در ادامه معادله انتقال آلودگی در حالت یک‌بعدی با استفاده از روش شبه‌معکوس‌پذیری حل می‌شود. در انتها معادله جابه‌جایی-پراکندگی به‌علاوه ترم پایداری (از روش QR) با تبدیل فوریه محاسبه شده است.

۲-۱. معادله جابه‌جایی-پراکندگی در حالت مستقیم

معادله انتقال آلودگی یک معادله دیفرانسیل جزئی، خطی و سهموی است که نسبت به مکان و زمان به ترتیب مرتبه دوم و اول است. این معادله در جریان دائم، یکنواخت و در حالت یک‌بعدی در راستای محور x با شرایط مرزی(BC)[10] و شرط اولیه (IC) مطابق معادله (۱) است[۲۱]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial C}{\partial t}=-V\times\frac{\partial C}{\partial x}-D\times\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-KC,\\
&\qquad (0\le t<\infty,-\infty<x<+\infty)\\
&C(x,0)=f(x)\xrightarrow{\text{شرط ابتدایی}} IC\\
&\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=\pm\infty}=0\xrightarrow{\text{شرایط مرزی}} BC
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

در معادله (۱)، V سرعت جریان، D ضریب پراکندگی[12]، $f(x)$ شرط اولیه معادله، C غلظت ماده آلاینده و k ضریب زوال ماده آلاینده است. ترم جابه‌جایی دارای توان مشتق اول مکانی است و بیانگر جابه‌جایی جرم با حرکت جریان است و ترم پراکندگی دارای مشتق توان دوم مکانی و بیان‌گر پخش جرم با گرادیان سرعت در رودخانه است. معادله (۱) در حالت مستقیم و گام زمانی مثبت با روش‌های معمول عددی و تحلیلی قابل حل است. در این معادله اگر توزیع مکانی غلظت آلاینده $f(x)$ مشخص باشد، می‌توان با گام زمانی مثبت $(t>0)$ به محاسبهٔ غلظت آلاینده پرداخت. در این تحقیق از معادله مستقیم برای صحت‌سنجی پاسخ‌های روش شبه‌معکوس‌پذیری استفاده می‌شود.

۲-۲. معادله جابه‌جایی-پراکندگی در حالت معکوس

در این بخش برای شناسایی منبع آلاینده(سری زمانی) نیاز به محاسبه معادله جابه‌جایی-پراکندگی در گام زمانی منفی است. اما این معادله در گام زمانی منفی در دسته معادله‌های جزئی بدخیم قرار خواهد گرفت. مسائل بدخیم در محاسبات مربوط به علوم مهندسی بسیار ظاهر می‌شوند. مسئله بدخیم حداقل یکی از شرایط زیر را دارد [۲۲]:

۱. جواب نداشته باشد،

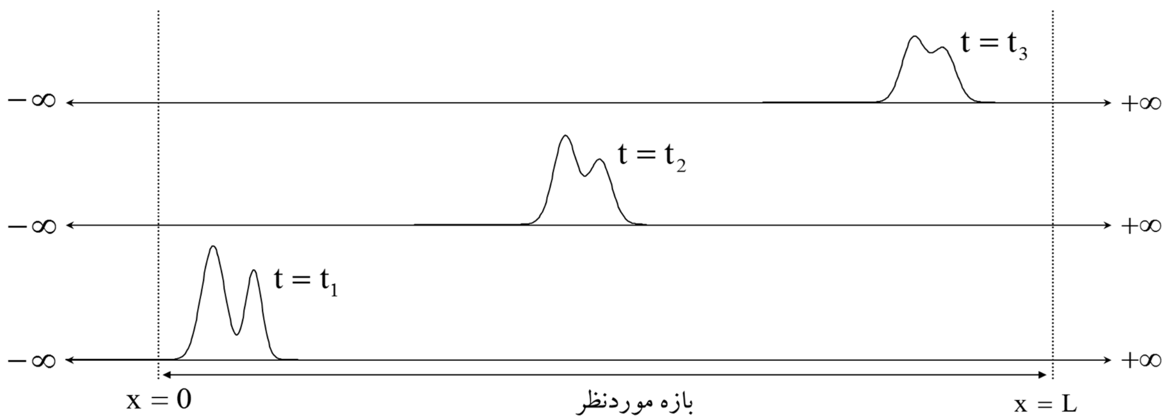
۲. جواب یکتا نداشته باشد،

۳. جواب‌ها به‌صورت پیوسته به ورودی‌های مسئله وابسته نباشد (تغییرات کوچک در ورودی، تغییرات بزرگ در جواب مسئله ایجاد نکند).

معادلهٔ بدخیم از روش‌های متداول موجود قابل حل نیست که علت این امر ناپایداری یا به‌اصطلاح واگرایی پاسخ‌های معادله دیفرانسیل با روش‌های معمول است. روش شبه‌معکوس‌پذیری روشی برای حل معادله‌های دیفرانسیل جزئی بدخیم است. روش شبه‌معکوس‌پذیری به‌وسیله ترم پایداری مشتق چهارم نقش اصلی در همگرایی پاسخ‌ها را بر عهده دارد و به عبارت بهتر این ترم موجب خوش‌خیمی معادله دیفرانسیل جزئی خواهد شد و از واگرایی پاسخ‌ها در گام زمانی منفی جلوگیری می‌کند یا به‌عبارت‌دیگر معادلهٔ جابه‌جایی-پراکندگی را می‌توان در گام زمانی منفی حل کرد [۲۳]. اضافه شدن ترم مشتق چهارم باعث تغییر معادله اصلی خواهد شد، اما این تغییر بسیار کوچک و قابل چشم‌پوشی است و همین تغییر کوچک سبب پایداری این معادله در گام زمانی منفی می‌شود. معادلهٔ (۱) در صورت اضافه شدن ترم پایداری همراه با شرایط مرزی و انتهایی (FC)[13] به‌صورت زیر است:

در معادله (۲)، $g(x)$ نیز شرط انتهایی معادله و ε ضریب پایداری (S.C)[14] نام دارد. علت وجود شرط انتهایی در معادله (۲) ترم پایداری است زیرا با افزودن ترم مشتق چهارم، معادله به حالت معکوس در زمان تبدیل می‌شود و برای حل معادله (۲) نیاز به نیمرخ مکانی در زمان انتهایی است. با توجه به شکل (۱) نیمرخ انتهایی در زمان $T = t_3$ تعریف می‌شود و مدل معکوس این نیمرخ را در زمان‌های ماقبل t_2 و t_1 پیش‌بینی خواهد کرد، ازاین‌رو نیمرخ طولی در گام‌های زمان منفی قابل شناسایی است.

$$\begin{gathered}
\frac{\partial C}{\partial t} = -V \times \frac{\partial C}{\partial x} + D \times \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \varepsilon \times \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} - KC = 0, \\
(0 \le t < \infty, -\infty < x < +\infty) \\
u(x,T) = g(x) \xrightarrow{\text{شرط انتهایی}} FC \\
\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pm\infty} = 0 \xrightarrow{\text{شرایط مرزی}} BC
\end{gathered} \tag{۲}$$



شکل ۱. نیمرخ مکانی غلظت آلاینده در بازهٔ نامتناهی

برای حل معادله (۲) باید بتوان این معادله را با یک تقریب خوب در دامنه نامتناهی از دیدگاه ریاضی حل کرد، به این صورت که حل تحلیلی این معادله در دامنه نامتناهی به یک رابطهٔ صریح ختم می‌شود که محاسبه غلظت در گام‌های زمانی منفی (زمان ماقبل) را ممکن می‌کند (شکل ۱). علت وجود شرایط نامتناهی در معادله (۲) به‌کارگیری یک تقریب از دیدگاه ریاضی است. بسیاری از معادله‌های دیفرانسیل جزئی که در بازهٔ متناهی مورد بررسی و آنالیز قرار خواهند گرفت راه‌حل آن‌ها وابسته به مقادیرشان در مرزهای بالادست و پایین‌دست است. مسائل موجود برای بررسی از دیدگاه فیزیکی دارای محدودهٔ بی‌نهایت نیستند، اما بررسی و شناخت یک مدل از دیدگاه ریاضی (که در آن تأثیر شرایط مرزی ناچیز باشد) را می‌توان محدودهٔ نامتناهی در نظر گرفت [۲۴]. مسائل فیزیکی همواره دارای شرایط ابتدایی و انتهایی هستند، برای حل مسائل فیزیکی به روش ریاضی و تحلیلی با توجه به بزرگی بازه مسئله از دیدگاه فیزیکی می‌توان در حل تحلیلی بازه‌ها را با تقریب خوب به‌صورت نامتناهی در نظر گرفت. به عنوان نمونه با در نظر گرفتن توزیع دمای اولیه برای تابع

$f(x)$ با نزدیک شدن حدود آن به بی‌نهایت دارای مقدار صفر خواهد بود، این بدان معنی است که در ابتدا برای همه مقادیر مکانی (x) که به اندازهٔ کافی بزرگ باشند، با تقریب می‌توان دما را صفر در نظر گرفت. بنابراین می‌توان طول رودخانه را از دیدگاه فیزیکی- ریاضی با یک تقریب خوب بی‌نهایت در نظر گرفت [۲۵]. با توجه به مطالب قبل رودخانه از دیدگاه ریاضی در محدودهٔ بی‌نهایت تعریف می‌شود، هر چند از منظر فیزیکی آلاینده از نقطه معلوم وارد رودخانه خواهد شد، اما رودخانه در بالادست و همچنین پایین‌دست ادامه خواهد داشت (شکل ۱). بنابراین برای حل معادلهٔ دیفرانسیل جزئی (۲) که از دیدگاه مکانی در بازه بی‌نهایت تعریف خواهند شد، از حل تحلیلی تبدیل فوریه استفاده می‌شود [۲۶].

تبدیل‌های فوریه تابع f در سرتاسر (∞+∞−) تعریف می‌شوند. تبدیل فوریه در حالت مستقیم معادله (۳) و تبدیل معکوس معادله (۴) به‌صورت روابط زیر بیان می‌شود:

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\times e^{-i\omega t}dt \tag{۳}$$

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\times e^{i\omega t}d\omega \tag{۴}$$

در گام نخست با استفاده از معادله (۳) (تبدیل فوریه) از دو طرف معادله (۲) تبدیل فوریه نسبت به پارامتر x (تبدیل فوریه نسبت به مکان) اعمال می‌شود:

$$\frac{d\tilde{C}}{d(T-t)}=(I\times v\times\omega+D\times\omega^2-\varepsilon\times\omega^4)\times\tilde{C} \tag{۵}$$

در معادله (۵) I، T، $\tilde{c}$ به ترتیب عدد مختلط، کل زمان شبیه‌سازی، تبدیل فوریه غلظت و با استفاده از ساده‌سازی و انتگرال‌گیری نسبت به دو طرف معادله (۵) نتیجه می‌دهد:

$$\ln(\tilde{C})=(I\times v\times\omega+D\times\omega^2-\varepsilon\times\omega^4)\times(T-t)+cte \tag{۶}$$

برای یافتن ثابت موجود در معادله (۶) ابتدا از دو طرف شرط اولیه معادله (۲) تبدیل مستقیم فوریه اعمال خواهد شد:

$$\tilde{C}(x,0)=\tilde{f}(u) \tag{۷}$$

در گام بعد با استفاده از معادله (۶) و به‌کارگیری معادله (۷) نتیجه می‌دهد:

$$\tilde{C}=e^{(-\varepsilon\times\omega^4+I\times\omega\times v+D\times\omega^2)\times(T-t)}\times\tilde{f}(u) \tag{۸}$$

با استفاده از معکوس تبدیل فوریه نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$C(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{(-\varepsilon\times\omega^4+D\times\omega^2)\times(T-t)} \times e^{i\omega x}\times e^{iv\omega t}\times\tilde{f}(u)d\omega \tag{۹}$$

در معادلهٔ (۹) برای ساده‌سازی شرط اولیه در دامنه فوریه از معادلهٔ معکوس تبدیل فوریه استفاده می‌شود:

$$C(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{(-\varepsilon\times\omega^4+D\times\omega^2)\times(T-t)}\times e^{i\omega x}\times e^{iv\omega t} \times\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\times e^{-i\xi x}d\xi\ d\omega \tag{۱۰}$$

در نتیجه:

$$C(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{(-\varepsilon\times\omega^4+D\times\omega^2)\times(T-t)} \times e^{-i\omega x}\times e^{iv\omega t}\times e^{-i\xi x}\times\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\ d\xi d\omega \tag{۱۱}$$

در انتها از ساده‌سازی معادلهٔ (۱۱) دو رابطهٔ زیر برای محاسبه غلظت در مکان و زمان موردنظر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} &E(x,T-t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{(D\times\omega^2-\varepsilon\times\omega^4)\times(T-t)} \\ &\times\cos\left[\omega\times(x+v\times(T-t)\right]d\omega \\ &C(x,T-t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\times E(x',T-t)d\xi \\ &x'=x-\xi \end{aligned} \tag{۱۲}$$

در معادلهٔ (۱۲) می‌توان با استفاده از گام زمانی منفی به محاسبه غلظت در مکان و زمان دلخواه در بالادست رودخانه دست یافت. درواقع این معادله قادر است تا سری زمانی انتشار یافته از منبع(در مکان x=0) را بازسازی کند.

گاهی در حل تحلیلی معادله‌های دیفرانسیل جزئی به انتگرال‌های نوسانی برخورد خواهد شد. یک انتگرال[۱۵] نوسانی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$I_0^{\infty}(\omega.f)=\int_0^{\infty}\omega(x)\times f(x)dx \tag{۱۳}$$

که در آن ω یک تابع نوسانی است. انتگرال‌های نوسانی نقش مهمی در بسیاری از علوم پایه و مهندسی ایفا می‌کنند. به‌صورت کلی محاسبه این انتگرال‌ها درصورتی که انتگرال‌ده (عبارتی که انتگرال‌گیری می‌شود) آن‌ها نوسانی شدید باشد، مشکل است [۲۷].

انتگرال نوسانی دارای اکسترمم‌های موضعی متعددی روی ناحیه انتگرال‌گیری هستند. روش‌های مختلفی برای محاسبه عددی و تحلیلی این انتگرال‌ها وجود دارد، اما این روش‌ها برای بازه‌های نامتناهی کاربرد ندارند، نخستین تلاش‌ها برای انتگرال‌گیری عددی توابع نوسانی روی بازه بی‌کران به‌وسیله هورویتز و زوایفل و... انجام شد. حل انتگرال‌های نوسانی به روش عددی نسبت به روش‌های عددی کلاسیک (نیوتن، کاتس، ذوزنقه و سیمپسون) سریع‌تر است [۲۸].

پس از تعیین معادله تحلیلی معادله (۱۲) به‌صورت معکوس در زمان، نتایج آن اعتبارسنجی می‌شود. برای اعتبارسنجی حل‌های تحلیلی از مثال‌های فرضی استفاده می‌شود [۲۹]. در مثال‌های فرضی تابع شدت مرز ورودی و نقطه برداشت داده و برداشت نیمرخ مکانی غلظت آلاینده در نظر گرفته می‌شوند تا نحوه عملکرد مدل معکوس به‌درستی سنجیده شود. در انتها نیز آنالیز حساسیت ضریب پایداری بررسی شده است.

۳. نتایج و بحث

قبل از شروع حل تحلیلی معادله (۱۲) به روش شبه‌معکوس‌پذیری باید به این نکته توجه داشت که برای حل معکوس این معادله نیاز به نیمرخ طولی یا مکانی است. منظور از نیمرخ مکانی یا شرایط انتهایی برداشت غلظت آلاینده در طول رودخانه در یک زمان خاص است. برای به‌دست آوردن نیمرخ مکانی (شکل ۳ و ۶) ابتدا یک الگوی آلاینده در بالادست رودخانه فرض می‌شود (شکل ۲ و ۵)، سپس این نیمرخ به‌عنوان ورودی برای مدل مستقیم تعریف خواهد شد و در یک زمان خاص از مدل مستقیم نیمرخ مکانی به‌عنوان خروجی دریافت می‌شود. خروجی مدل مستقیم به‌عنوان شرط انتهایی مدل معکوس در نظر گرفته می‌شود. در حقیقت نیمرخ مکانی مدل معکوس باید از رودخانه داده‌برداری شود اما به دلیل نبود داده واقعی از خروجی مدل مستقیم استفاده می‌شود. در ادامه به‌منظور ارزیابی حل تحلیلی موردنظر دو مثال فرضی در نظر گرفته شد. در مثال اول الگوی ساده به‌کارگیری شد و در مثال دوم از یک الگوی پیچیده برای نزدیک نمودن نتایج به واقعیت استفاده می‌شود.

۳-۱. نتایج تحلیلی و عددی روش شبه‌معکوس‌پذیری

گراف‌های شکل (۳) هر یک به‌صورت جداگانه در حالت بدون خطا و دارای خطا ورودی معادله (۱۲) هستند و نتایج مطابق گراف‌های شکل (۴) است (فقط نتایج مربوط به نیمرخ مکانی دارای خطا ارائه می‌شود).

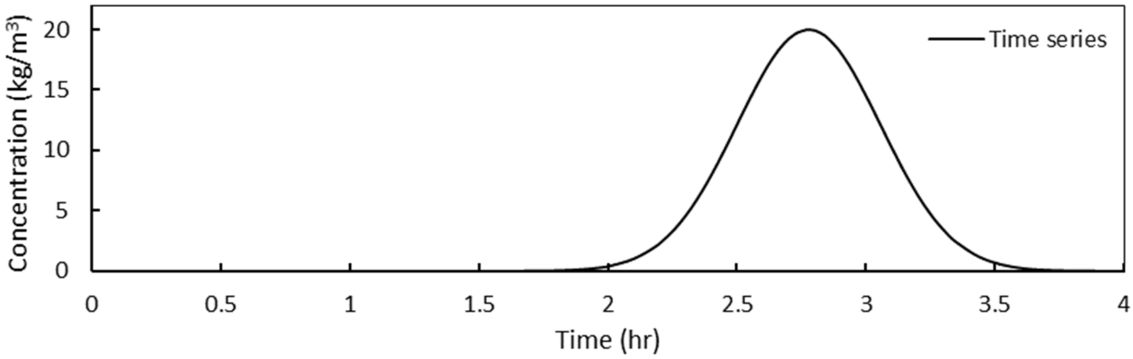
۳-۱-۱. مثال اول: به‌کارگیری روش QR با الگوی ساده

در این قسمت به بررسی عملکرد حل تحلیلی به‌دست آمده با روش شبه‌معکوس‌پذیری و استفاده از تبدیل فوریه برای حل معادله در حالت یک‌بعدی، یکنواخت و ماندگار پرداخته می‌شود. برای حل معادلهٔ (۱۲) فرضیه‌های زیر در نظر گرفته می‌شود:

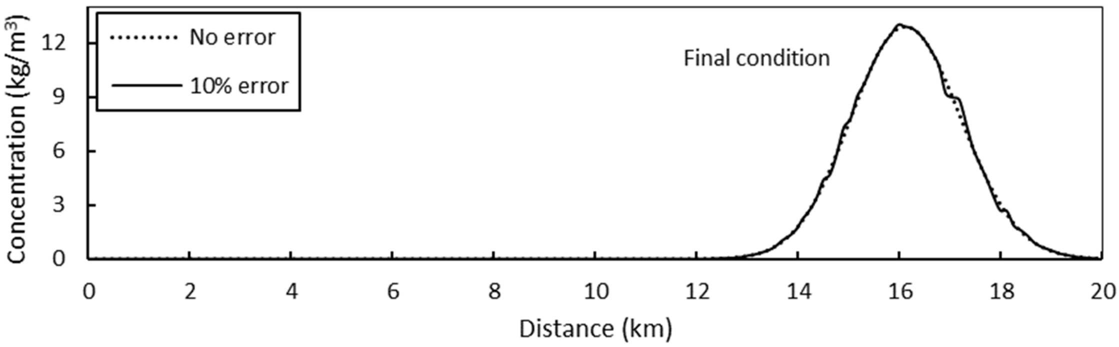
جدول ۱. مقادیر مربوط به پارامترهای انتقال آلاینده

L(km)	T(hr)	V(m/s)	D(m^2/s)
۲۰	۱۶/۶۷	۰/۵	۱۵

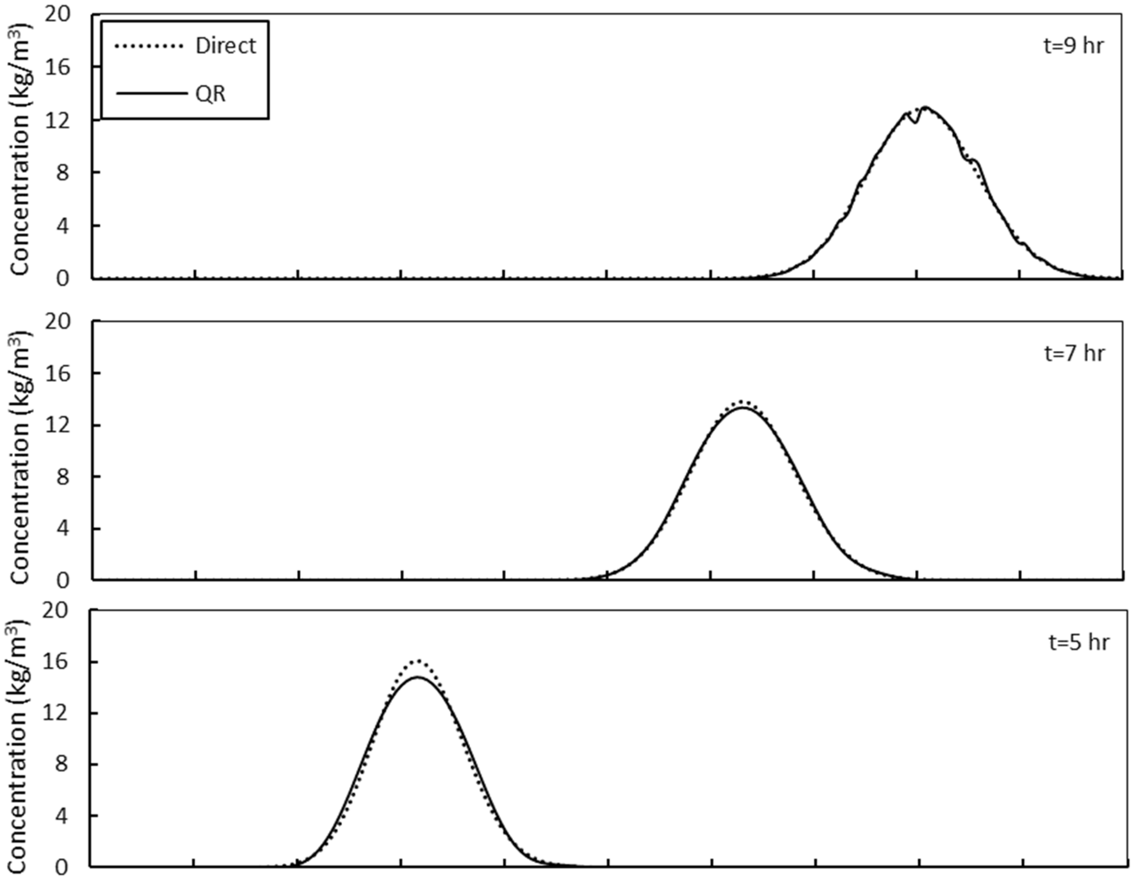
در جدول (۱)، L طول کل رودخانه، T کل زمان شبیه‌سازی، V سرعت جریان و D ضریب پراکندگی رودخانه است. در ابتدا برای حل معادلهٔ (۱۲) نیاز به نیمرخ طولی غلظت آلاینده به‌عنوان شرط انتهایی در مدل معکوس است (شکل ۳). این نیمرخ از حل مستقیم معادله (۱) با گام زمانی مثبت به‌دست خواهد آمد که ورودی این حل مستقیم یک مثال فرضی است (شکل ۲). نیمرخ که از حل مستقیم به‌دست آمد با توجه به اینکه ثبت داده‌ها در عمل دارای خطاست (خطای انسانی، سیستماتیک و ...) بنابراین برای نیمرخ مکانی ۱۰ درصد خطا در نظر گرفته شد (شکل ۴) تا بتوان اثر این خطاها را در پاسخ معادله (۱۲) در نظر گرفت. میزان ۱۰ درصد خطا کاملاً به‌صورت تصادفی در بین نقاط تصادفی اعمال شد.



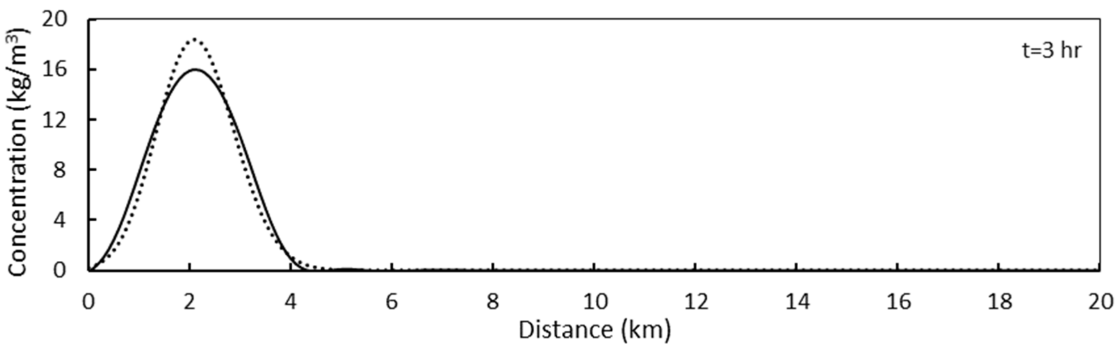
شکل ۲. تابع شدت غلظت آلاینده نسبت به زمان (نیمرخ زمانی) برای مدل QR



شکل ۳. نیمرخ طولی غلظت آلاینده (نیمرخ مکانی)



شکل ۴. نیمرخ مکانی معکوس غلظت آلاینده با اعمال ۱۰٪ خطا در زمان‌های مختلف



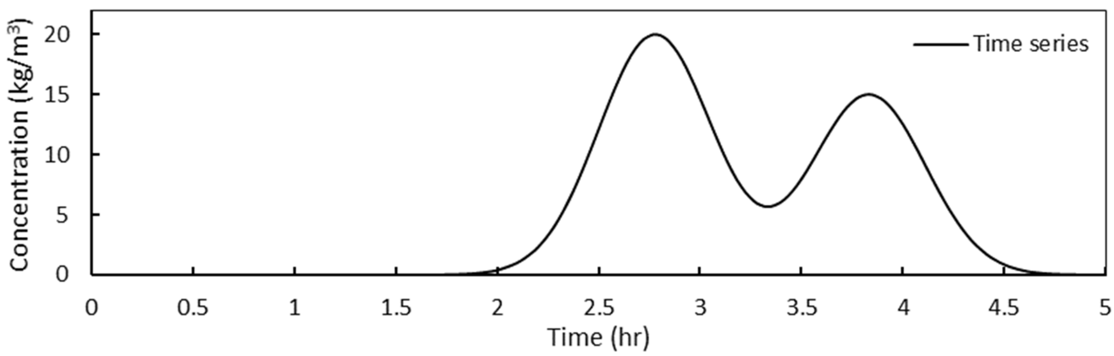
شکل ۴ (ادامه). نیمرخ مکانی معکوس غلظت آلاینده با اعمال ۱۰٪ خطا در زمان‌های مختلف

همان‌طور که مشخص است با توجه به شکل (۴) که نتایج مربوط به اعمال ۱۰ درصد خطای سیستماتیک وجود دارد. مدل گفته‌شده به‌خوبی روند افزایش غلظت آلاینده را در بالادست رودخانه پیش‌بینی می کند. اما خطای سیستماتیک باعث نوسانات کوچکی به‌خصوص در نیمرخ‌های بالادست رودخانه می‌شود که علت این خطا کاهش زمان (گام زمانی منفی) برای پیش‌بینی سری زمانی است و به‌تبع آن تأثیرگذاری ترم پایداری بیشتر خواهد بود که به خطا منجر می‌شود. درنهایت قابل بیان است که روش شبه‌معکوس‌پذیری با وجود اعمال خطای موجود توانسته است که شبیه‌سازی را به‌خوبی انجام دهد و تنها با گذشت زمان صرفاً اختلاف موجود در بیشینه غلظت قابل‌مشاهده است. در مثال مورد بررسی میزان ضریب پایداری ترم مشتق چهارم برابر با ۳۲۰۰۰۰ است. مقدار این ضریب در مشتق چهارم برابر ترم پایداری خواهد شد، که حاصل این مقدار عددی کوچک می‌شود که این عدد کوچک عامل پایداری معادله در گام زمانی منفی است. مقدار ضریب پایداری با توجه به مطالب گذشته روش مشخصی برای تعیین ندارد اما با توجه به نوع مسئله، فیزیک موجود و سایر عوامل در مقدار آن مؤثر هستند و میزان بهینه این پارامتر صرفاً از طریق آزمون‌وخطا قابل تعیین خواهد بود. مدل تحلیلی موجود با وجود خطای سیستماتیک به‌خوبی روند پیش‌بینی غلظت رودخانه را انجام داده است که حاکی از توانمندی این مدل تحلیلی است.

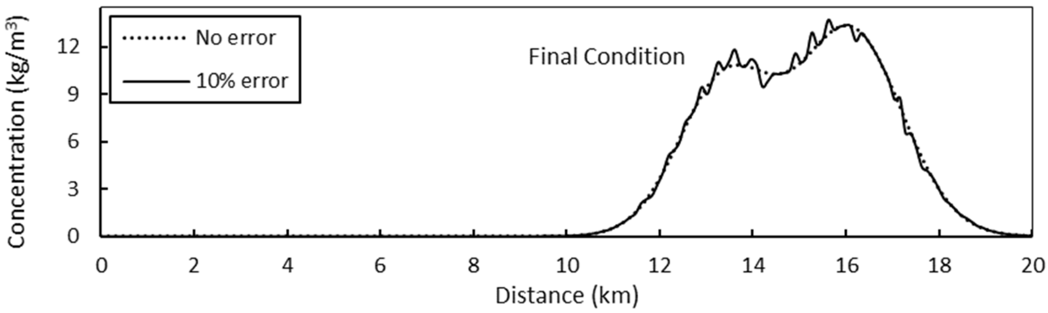
۳-۱-۲. مثال دوم: به‌کارگیری روش QR با الگوی پیچیده‌تر

در قسمت قبل نمودار سری زمانی به‌صورت ساده فرض شد، اما اغلب نوع الگوی بارگذاری آلاینده در رودخانه به صورت‌های دیگر وجود دارد. در این قسمت برای بررسی مدل تحلیلی، ارائه بهتر و نزدیک نمودن نتایج به واقعیت از یک الگوی پیچیده‌تر (شکل۵) استفاده خواهد شد.

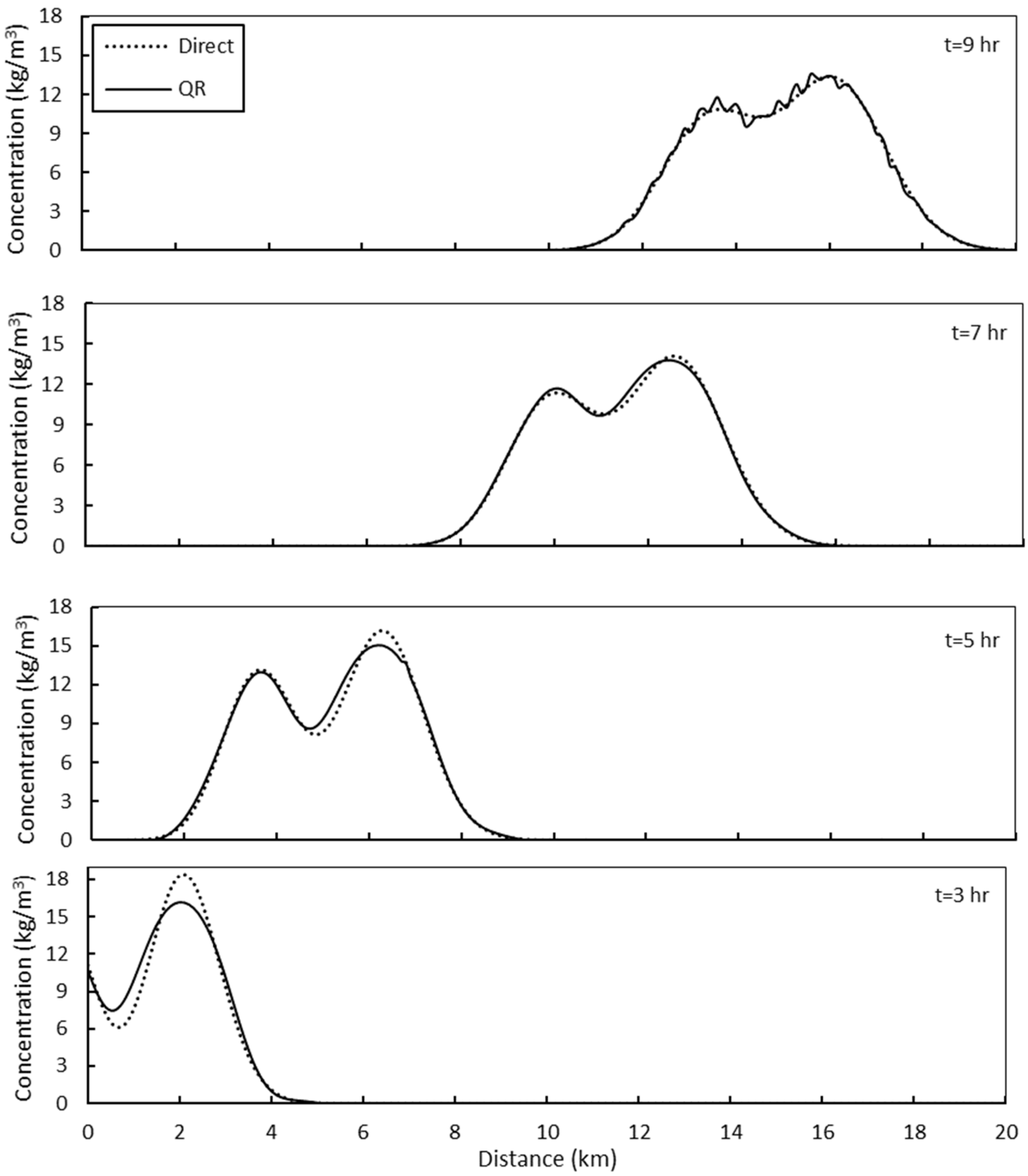
مانند قسمت قبل سری زمانی شکل (۵) به‌عنوان ورودی برای مدل مستقیم تعریف می‌شود و برای آزمودن دقیق آن ۱۰ درصد خطای کاملاً تصادفی به آن اضافه می‌شود(شکل ۶).



شکل ۵. تابع شدت غلظت آلاینده نسبت به زمان (نیمرخ زمانی) برای مدل QR



شکل ۶. نیمرخ طولی غلظت آلاینده (نیمرخ مکانی)



شکل ۷. نیمرخ مکانی معکوس غلظت آلاینده با اعمال ۱۰٪ خطا در زمان‌های مختلف

با توجه به شکل‌های (۷) نمودارهای حل تحلیلی با روش QR به‌صورت مشخص و در کمترین نوسان ممکن الگوی موردنظر را بازسازی کرده‌اند. با توجه به این‌که الگوی بارگذاری رودخانه در چند قسمت دارای شیب کاهشی-

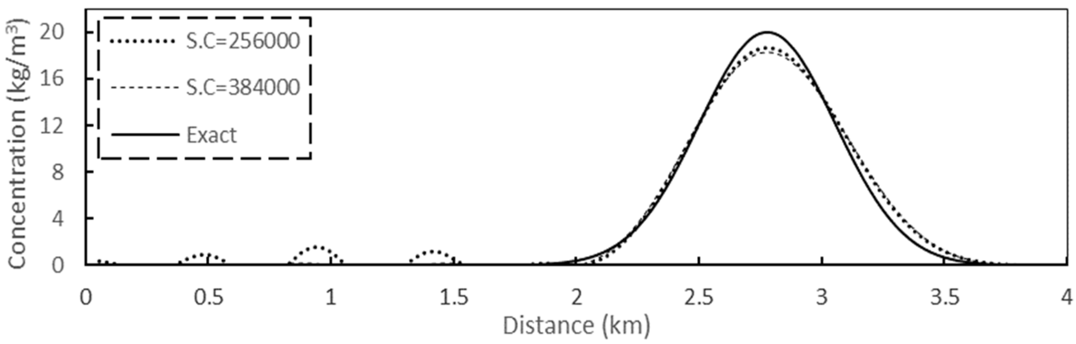
افزایشی است، اما مدل تحلیلی با دقت بالا این روند را پیش‌بینی می‌کند که این امر با توجه به مدل عددی کاملاً مشهود است. در نمودار شکل (۷) نیمرخ مکانی صرفاً در بیشینه غلظت دچار خطا است، اما با گذشت زمان علاوه بر قسمت بیشینه نمودارها این امر در سایر نقاط مشخص است و حتی در زمان‌های ابتدایی ناهمگونی وجود دارد. اما مدل درنهایت به‌خوبی روند صعودی و نزولی غلظت را به‌خوبی بازسازی کرده است. ضریب پراکندگی در حالت مستقیم باعث نرم شدن گراف‌ها و کاهش میزان بیشینه غلظت می‌شود، اما در مدل معکوس عکس این عمل است که در گراف‌های شکل (۷) با گذشت زمان قابل مشاهده است و تیزتر شدن قله‌ها به‌صورت قابل قبولی توسط مدل معکوس بازسازی می‌شود. در تعیین پارامتر ضریب پایداری مناسب عوامل مختلفی دخالت دارند که یکی از مهم‌ترین عوامل خطای داده‌های ورودی مدل معکوس است، هرچه میزان این خطا بیشتر باشد، برای محاسبه پاسخ دقیق‌تر نیاز به افزایش ضریب پایداری است، اما افزایش بیش‌ازحد ضریب پایداری باعث نرم شدن گراف‌ها می‌شود و از پاسخ موردنظر فاصله خواهد گرفت. نکته حائز اهمیت دیگر مدل الگوی بارگذاری است، هرچه این الگو پیچیده‌تر و روند ناهمگون‌تری داشته باشد، بازسازی آن با روش شبه‌معکوس‌پذیری سخت‌تر، با دقت کمتر و زمان‌بر خواهد بود و میزان ضریب پایداری افزایش خواهد یافت در این مثال میزان این ضریب برابر با ۶۵۰۰۰۰ است که نسبت به مثال اول ضریب پایداری بیشتری دارد.

۳-۲. آنالیز حساسیت ضریب پایداری

در معادلهٔ (۲) ترم پایداری نقش اصلی در همگرایی پاسخ‌ها در گام زمانی منفی را بر عهده دارد، اما از طرفی به‌صورت دقیق‌تر می‌توان بیان داشت که ضریب پایداری نقش اصلی را در همگرایی پاسخ‌ها بر عهده دارد. ضریب ترم مشتق چهارم را نمی‌توان با روش مشخصی تعیین نمود و این امر فقط با توجه به فیزیک مسئله، مقادیر ضرایب معادله‌های (سرعت و ضریب پراکندگی) و دقت در برداشت داده‌ها انجام می‌پذیرد و مهم‌ترین عامل نوع الگوی بارگذاری است. باید توجه داشت که مقدار ضریب پایداری باید در بازهٔ خاصی تعریف شود؛ زیرا درصورتی‌که مقدار ضریب پایداری از کران پایین بازه کوچک‌تر باشد، پاسخ‌ها ناپایدار می‌شود و اگر از کران بالای بازه بیشتر شود پاسخ‌ها به سمت صفر میل می‌کند. این بازه با توجه به فیزیک مسئله و سعی و خطا محاسبه می‌شود. برای بررسی حساسیت مدل تحلیلی به ضریب پایداری مقدار ۱۰ و ۲۰ درصد خطا برای ضریب پایداری در نظر گرفته شد و میزان ضریب همبستگی (R^2) و درصد خطای نسبی (MRE) محاسبه شد.

جدول ۲. شاخص خطا به‌ازای مقادیر مختلف ضریب پایداری

Error	ε-0.2ε	ε-0.1ε	ε	ε+0.1ε	ε+0.2ε
R^2	۰/۹۷۳۴	۰/۹۹۲۱	۰/۹۹۲۷	۰/۹۹۲۴	۰/۹۹۱۹
MRE	۰/۲	۰/۱	۰/۰	۰/۱	۰/۲



شکل ۸. نیمرخ زمانی حاصل از مدل معکوس به ازای ضریب پایداری مختلف

با توجه به شکل (۸) مقدار ضریب پایداری ۲۵۶۰۰۰ باعث ایجاد نوساناتی بین نقطه شروع و اوج‌گیری گراف می‌شود که حاکی از نوسانی شدن به ازای مقادیر کوچک ضریب پایداری است، از طرفی ضریب پایداری ۳۴۸۰۰۰۰ باعث ایجاد نرم شدن گراف خواهد شد که این امر در ضریب پایداری بزرگ‌تر با توجه به جدول (۲) قابل مشاهده است. در نهایت همان طور که در جدول (۲) مشخص است مقدار ضریب پایداری ۳۲۰۰۰۰ دارای بیشترین ضریب همبستگی است و همواره برای انتخاب این ضریب باید توجه داشت که کمترین و بهینه‌ترین مقدار مدنظر باشد، زیرا سعی بر هر چه کمتر نمودن میزان تأثیر این ترم در پاسخ‌های موردنظر است. و درنهایت می‌توان بیان داشت که روش شبه‌معکوس‌پذیری نقش تعیین کننده‌ای در پاسخ‌ها دارد، بدین‌صورت که اگر این ضریب از مقدار موردنظر بیشتر باشد، پاسخ‌ها به سمت صفر میل می‌کند. که به علت این امر اثرگذاری این ترم نسبت به سایر ترم‌های معادله پیشی خواهد گرفت و درصورتی که مقدار ضریب پایداری از حد موردنظر کمتر شود نوسانات در نمودار مدل معکوس به حدی زیاد خواهد شد که پاسخ‌های موردنظر واگرا می‌شود.

٤. نتیجه‌گیری

در پژوهش انجام‌شده حل تحلیلی معادله جابه‌جایی پراکندگی به‌علاوه ترم پایداری (مشتق چهارم و ضریب پایداری) استفاده شد که این ترم سبب همگرایی و پایداری پاسخ‌های موردنظر خواهد شد. معادله جابه‌جایی-پراکندگی در حالت یک‌بعدی با ضرایب ثابت و به ازای شرط اولیه، شرایط مرزی همگن و الگوی آلاینده ساده و نامنظم به‌علاوه ترم پایداری و استفاده از روش تبدیل فوریه حل شده است. به‌منظور ارزیابی حل انجام شده، نتایج آن در دو قسمت مجزا با حل عددی مقایسه شده است. در مثال ابتدایی با استفاده از مدل مستقیم نیمرخ مکانی به دست آمد و یک خطای کاملاً تصادفی در مدل تعریف شد؛ سپس حل موردنظر با روش عددی مقایسه شده است و نتایج قابل قبولی به دست آمده است. در مثال دوم الگویی پیچیده‌تر مدنظر قرار گرفت تا توانایی مدل در حالت انطباق با وضعیت طبیعی موردسنجش قرار گیرد که نتایج عددی حاکی از توانایی بالای مدل تحلیلی بود. در ادامه به‌منظور آنالیز حساسیت ضریب پایداری به میزان ۱۰ و ۲۰ درصد خطا در این ضریب ایجاد شد که با توجه به شاخص آماری ضریب همبستگی تقریباً برابر با یک به دست آمد و میزان خطای متوسط نیز برابر با ۰/۱ و ۰/۲ بود. با توجه به شاخص‌های خطای موجود می‌توان دریافت که مدل تحلیلی ارائه شده از انطباق خوبی برخوردار است. حل تحلیلی مسئله به دلیل انعطاف زیاد در پیش‌بینی و بازسازی سری زمانی منبع آلاینده دلخواه قابلیت کاربرد به‌منظور صحت‌سنجی انواع حل‌های عددی و حتی برای مسئله واقعی را دارد. مقایسه نتایج روش ارائه‌شده با سایر روش‌های شناسایی منبع آلاینده بیانگر این است که این روش علاوه بر محاسبه الگوی زمانی منبع آلاینده، تحولات مکانی توزیع غلظت را تا رسیدن به نقطه ورودی نیز ارائه می کند که این امکان در سایر روش‌ها وجود ندارد. علاوه بر موارد بیان‌شده به دلیل تحلیلی بودن روش حاضر برای حل آن نیاز به استفاده از روش‌های عددی و گسسته‌سازی معادله‌های مربوط نیست که این امر نیز در جای خود علاوه بر سادگی مراحل، خطاهای رایج روش‌های عددی ازجمله خطای قطع را حذف می کند. همچنین مقایسه‌ها حاکی از آن است که از منظر زمان محاسبات روش ارائه‌شده از روش‌های بر پایه بهینه‌سازی ریاضی بهتر عمل می‌کند. البته وجود ضریب پایداری و تعیین آن از محدودیت‌های روش حاضر است. در انتها می‌توان اظهار داشت که افزایش خطای اندازه‌گیری در برداشت داده غلظت آلاینده، الگوی پیچیده و سایر عوامل بر دقت مدل در تعیین سری زمانی دخیل هستند؛ اما به‌واسطه افزایش ضریب پایداری می‌توان این خطا را برطرف نمود. از محدودیت‌های روش موجود، آزمون‌وخطا برای شناسایی محدوده ضریب پایداری است اما روش شبه‌معکوس‌پذیری به دلیل صرف هزینه و زمان کمتر نسبت به سایر روش‌های موجود ارجحیت دارد.

٥. سپاسگزاری

از دانشگاه تربیت مدرس به‌ویژه گروه سازه‌های آبی دانشکده کشاورزی نهایت قدردانی می‌شود.

مراجع

[1] Kamble SM. Water pollution and public health issues in Kolhapur city in Maharashtra. International journal of scientific and research publications. 2014 Jan;4(1):1-6.

[2] Tong Y, Deng Z. Moment-based method for identification of pollution source in rivers. Journal of Environmental Engineering. 2015 Oct 1;141(10):04015026.

[۳] مهدی مظاهری. مدل ریاضی تشخیص منابع آلاینده در رودخانه: بازیابی مکان و شدت زمان منابع آلاینده [رسالهٔ دکتری]. تهران: دانشگاه تربیت مدرس؛ ۱۳۹۰.

[4] Hosseinkhani MR, Omidvar P. Smoothed Particle Hydrodynamics for the rising pattern of oil droplets. Journal of Fluids Engineering. 2018 Aug 1;140(8).

[5] Lattès R, Lions JL. The method of quasi-reversibility: applications to partial differential equations. 1969.

[6] Dorroh JR, Ru X. The application of the method of quasi-reversibility to the sideways heat equation. Journal of mathematical analysis and applications. 1999 Aug 15;236(2):503-19.

[7] Ismail-Zadeh A, Korotkii A, Schubert G, Tsepelev I. Numerical techniques for solving the inverse retrospective problem of thermal evolution of the Earth interior. Computers & structures. 2009 Jun 1;87(11-12):802-11.

[8] Xiong XT, Fu CL, Qian Z. Two numerical methods for solving a backward heat conduction problem. Applied mathematics and Computation. 2006 Aug 1;179(1):370-7.

[9] Qian A, Mao J. Quasi-reversibility regularization method for solving a backward heat conduction problem. American Journal of Computational Mathematics. 2011 Sep 1;1(3):159.

[10] Skaggs TH, Kabala ZJ. Recovering the history of a groundwater contaminant plume: Method of quasi–reversibility. Water Resources Research. 1995 Nov;31(11):2669-73.

[11] Liu C, Ball WP. Application of inverse methods to contaminant source identification from aquitard diffusion profiles at Dover AFB, Delaware. Water Resources Research. 1999 Jul;35(7):1975-85.

[12] Atmadja J, Bagtzoglou AC. Pollution source identification in heterogeneous porous media. Water Resources Research. 2001 Aug;37(8):2113-25.

[13] Wang Z, Liu J. Identification of the pollution source from one-dimensional parabolic equation models. Applied Mathematics and Computation. 2012 Dec 15;219(8):3403-13.

[14] Fan YA, Chuli FU, Xiaoxiao LI. Identifying an unknown source in space-fractional diffusion equation. Acta Mathematica Scientia. 2014 Jul 1;34(4):1012-24.

[15] Zhang T, Chen Q. Identification of contaminant sources in enclosed spaces by a single sensor. Indoor air. 2007 Dec 1;17(6):439-49.

[16] de Barros FP, Colbrook MJ, Fokas AS. A hybrid analytical-numerical method for solving advection-dispersion problems on a half-line. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2019 Aug 1;139:482-91.

[17] Ghane A, Mazaheri M, Samani JM. Location and release time identification of pollution point source in river networks based on the backward probability method. Journal of environmental management. 2016 Sep 15;180:164-71.

[18] Mazaheri M, Mohammad Vali Samani J, Samani HM. Mathematical model for pollution source identification in rivers. Environmental Forensics. 2015 Oct 2;16(4):310-21.

[19] Rump SM. Reliability in computing. Academic Press; 1988 Jan 1. Algorithms for verified inclusions: Theory and practice; p. 109-26.

[20] Guerrero JP, Pimentel LC, Skaggs TH, Van Genuchten MT. Analytical solution of the advection–diffusion transport equation using a change-of-variable and integral transform technique. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2009 Jun 1;52(13-14):3297-304.

[21] Chapra SC. Surface water-quality modeling. Waveland press; 2008 Dec 17.

[22] Hadamard J. Thesis on the problem of analysis relating to the equilibrium of embedded elastic plates. National printing press; 1908.

[۲۳] لوشابی محمد. کاربرد روش شبه‌معکوس‌پذیری در شناسایی منبع آلاینده در رودخانه [پایان‌نامه کارشناسی ارشد]. تهران: دانشگاه تربیت مدرس؛ ۱۳۹۶.

[24] Haberman R. Applied partial differential equations. Prentice Hall; 2003.

[25] Gray RM, Goodman JW. Fourier transforms: an introduction for engineers. Springer Science & Business Media; 2012 Dec 6.

[26] Polyanin AD, Nazaikinskii VE. Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists. CRC press; 2015 Dec 23.

[27] Santos A. Finite-size estimates of Kirkwood-Buff and similar integrals. Physical Review E. 2018 Dec 3;98(6):063302.

[۲۸] جورک خیراله. حل عددی انتگرال‌های نوسانی [پایان‌نامه کارشناسی ارشد]. سیستان و بلوچستان: دانشگاه سیستان و بلوچستان؛ ۱۳۷۱.

[۲۹] مشهدگرمه ندا، مظاهری مهدی، محمدولی سامانی جمال.
حل تحلیلی معادله دوبعدی و غیرماندگار انتقال آلودگی
برای شرایط اولیه و مرزی دلخواه . هیدروفیزیک. ۱۳۹۸؛
۵(۱):۱۲۳-۱۱۱.

پی‌نوشت

1. Simulation-Optimization
2. Geostatistic
3. Direct Method
4. Advection-Dispersion
5. Parabolic partial differential equation
6. Fick’s law
7. III –posed
8. Quasi-Reversibility
9. Fourier transform
10. Sinusoids
11. Boundary Condition
12. Initial condition
13. Diffusion coefficient
14. Final condition
15. Stabilization coefficient
16. Oscillatory integrals