

مقاله پژوهشی

DOR: 20.1001.1.24767131.1403.10.1.1.3

درصد همانندی: ۱٪

## تشکیل سیاه‌چاله‌های آنالوگ به عنوان سامانه‌های جاذب امواج از طریق جریان‌های گردابه‌ای

مسلم شفیعی<sup>۱\*</sup>، حمید بیگدلی<sup>۲</sup>، اکبر اصغرزاده بناب<sup>۳</sup>

m.shafiee@math.uk.ac.ir

<sup>۱\*</sup> نویسنده مسئول، گروه ریاضی فیزیک، پژوهشکده ریاضی ماهانی، دانشگاه شهید باهنر، کرمان، ایران.

h.bigdeli@casu.ac.ir

<sup>۲</sup> گروه مطالعات علم و فناوری، پژوهشکده جنگ، دانشگاه فرماندهی و ستاد آجا، تهران، ایران.

akbar.asgharzadeh@casu.ac.ir

<sup>۳</sup> گروه مطالعات علم و فناوری، پژوهشکده جنگ، دانشگاه فرماندهی و ستاد آجا، تهران، ایران.

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۳/۲۱

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۳/۱۵

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۲/۱۸

### چکیده

مطالعه ساختار سیاه‌چاله‌های آنالوگ نشان می‌دهد که انتشار امواج در حضور آنان با محدودیت‌های بسیار شدیدی همراه است و جریان‌های گردابه‌ای در داخل یک سیال، آنالوگی از سیاه‌چاله‌های چرخان به وجود می‌آورند به طوری که با تشکیل یک افق رویداد آکوستیکی مانع از ادامه انتشار امواج می‌شوند. در این پژوهش، با بررسی حرکت امواج در یک سیال با جریان گردابه‌ای ملاحظه می‌شود که سرنوشت نهایی موج به عوامل متعددی از جمله زاویه ورودی و میزان چرخش سیاه‌چاله بستگی دارد. در حالت کلی، امواج یا جذب می‌شوند و یا اینکه توسط نیروی چرخشی سیاه‌چاله پراکنده خواهند شد. چرخش سیاه‌چاله باعث می‌شود تا امواج تکانه زاویه‌ای کسب کنند، حتی در صورتی که در ابتدا تکانه زاویه‌ای نداشته باشند. نشان داده می‌شود که احتمال جذب امواج ناهمسوگرد به نسبت امواج همسوگرد بیشتر است، درحالی که احتمال پراکندگی امواج همسوگرد بیشتر از امواج ناهمسوگرد است. با محاسبه پارامتر تأثیر بحرانی، میزان جذب یا پراکندگی امواج با توجه به شرایط اولیه موج ورودی و ویژگی‌های سامانه بررسی و مشخص خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: سیاه‌چاله آنالوگ، افق رویداد آکوستیکی، جریان گردابه‌ای، جذب موج

## ۱. مقدمه

گسترش روزافزون فناوری و دانش ارتباطات اهمیت به کارگیری فیزیک امواج را دوچندان کرده است. این موضوع سبب شده است تا مسئله ایزوله و پاک سازی برخی محیطها از وجود امواج حائز اهمیت باشد، به گونه ای که برای این منظور مواد ویژه ای برای جذب امواج طراحی و ساخته شده است [۴-۱]. در سالهای اخیر، مطالعات و تحقیقات صورت گرفته در خصوص ساختارهای آنالوگ از سیاهچاله ها نشان داده است که این سامانه ها به خوبی قادر به جذب امواج هستند و در برخی موارد نسبت به مواد جاذب می توانند مؤثرتر ظاهر شوند. در واقع این سامانه ها برای مطالعه و بررسی سیاهچاله های اختزینیکی در انواع مختلفی از جمله از طریق آب، چگالش بوز-اینشتین، فیبرهای نوری غیرخطی و حلقه های یونی طراحی و ایجاد شده اند [۹-۵] و همه این ساختارها دارای خاصیت جذب امواج به عنوان یکی از مشخصه های سیاهچاله ها هستند.

سیاهچاله ها از پیش بینی های شگفت انگیز نظریه نسبیت هستند که به دلیل ویژگی های منحصر به فردشان در چند دهه گذشته همواره مورد توجه و تحقیق قرار گرفته اند. یکی از ویژگی های بارز این پدیده ها، افق رویداد<sup>۱</sup> است که همانند یک دروازه یک طرفه عمل می کند و هر آنچه به داخل آن سقوط کند، دیگر شانس برای خارج شدن از آن ندارد. میدان گرانشی بر روی افق رویداد یک سیاهچاله به قدری قدرتمند است که حتی نور نیز توانایی فرار از چنگال نیرومند آن را ندارد.

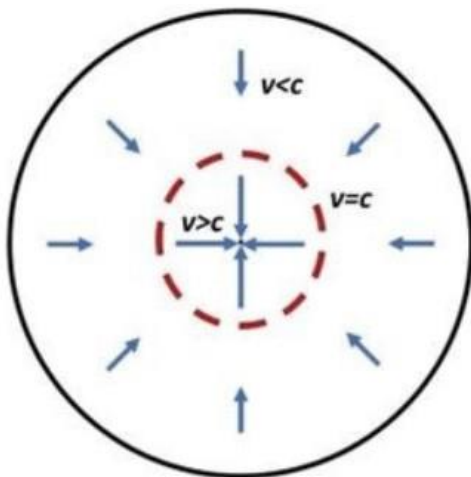
یک سیاهچاله غیرباردار و غیرچرخان از طریق فضا زمان شوارتزشیلد<sup>۲</sup> با متریک زیر توصیف می شود [۱۰]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1)$$

که  $M$  مقدار جرم سیاهچاله و  $(t, r, \theta, \phi)$  مختصات کروی توصیفگر فضا زمان هستند. سطح  $r = 2M$  افق رویداد یا مرز سیاهچاله است که درون آن را از بیرون جدا می کند.

در سال ۱۹۸۱، اونرو نشان داد که شکل معادلات مربوط به انتشار امواج در یک سیال شکل یکسانی با معادلات حرکت میدان های نرده ای در یک فضا زمان خمیده دارند [۱۱]. در این حالت، سیال همانند یک فضا زمان خمیده با یک متریک لورنتزی (متریک آکوستیک وابسته به سیال) توصیف می شود که به ویژگی های سیال بستگی دارد. در صورتی که سیال در شرایطی قرار بگیرد که متریک آکوستیک آن همانند متریک (۱) دارای افق رویداد باشد، آنگاه یک سیاهچاله آکوستیک ایجاد می شود که می تواند امواج را در ناحیه ای مشخص به دام بیندازد.

در چنین سیالی دو ناحیه به وجود خواهد آمد؛ یک ناحیه فروصوت و یک ناحیه فراصوت که به وسیله یک افق رویداد صوتی از یکدیگر جدا شده اند (شکل ۱). در ناحیه فروصوت، سیال با سرعتی کمتر از سرعت صوت جریان دارد و بنابراین امواج در این ناحیه قابلیت انتشار دارند، در حالی که در ناحیه فراصوت، سیال با سرعتی بیش از سرعت صوت جریان دارد و از این رو امواج در خلاف جهت جریان سیال قادر به حرکت نیستند. افق رویداد مرز بین دو ناحیه فروصوت<sup>۳</sup> و فراصوت<sup>۴</sup> است که سیال با سرعت صوت در آن جریان دارد.



شکل ۱. بردارهای آبی رنگ نشان دهنده جهت حرکت سیال هستند که به سمت مرکز نشانه می روند. هر چقدر که به مرکز نزدیک تر شویم، سیال با سرعت بیشتری جریان دارد، به عبارتی دیگر با گذر بیشتر به سمت مرکز، اندازه بردار سرعت افزایش می یابد. در افق رویداد که با دایره قرمز رنگ نشان داده شده است، سرعت جریان برابر سرعت صوت می شود.

شکلی کاملاً مشابه با (۱) خواهند داشت. ابتدا مقدمه‌ای از مکانیک سیالات بیان می‌شود و سپس قضیه مذکور به اثبات خواهد رسید.

حالت یک سیال با سه کمیت مشخص می‌شود [۱۲-۱۳]: ۱- چگالی  $(\rho)$ ، ۲- فشار  $(p)$  و ۳- سرعت جریان  $(\vec{v})$ . این کمیت‌ها از طریق معادله پیوستگی به یکدیگر مربوط می‌شوند:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (3)$$

همچنین اگر فرض شود که سیال تنها تحت تأثیر نیروی گرانش و یک نیروی خارجی باشد که توسط گرادیان یک تابع پتانسیل بیان می‌شود، آنگاه معادله اوایلر ایجاب می‌کند که

$$\rho [\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] = -\nabla p - \rho \nabla \phi - \rho \nabla \Phi, \quad (4)$$

که  $\phi$  بیانگر پتانسیل گرانشی و  $\Phi$  تابع پتانسیل مربوط به نیروی خارجی است. با فرض ناچرخان بودن سیال، یا به عبارتی دیگر  $\nabla \times \vec{v} = 0$ ، سرعت جریان می‌تواند برحسب یک پتانسیل نوشته شود:  $\vec{v} = -\nabla \psi$ . بنابراین در حالت ناچرخان بودن سیال، حالت سامانه توسط سه کمیت نرده‌ای  $\rho$ ،  $p$  و  $\psi$  مشخص می‌شود.

با استفاده از اتحاد

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \quad (5)$$

و تعریف تابع آنتالپی ویژه<sup>۹</sup> به صورت  $\nabla h = \frac{1}{\rho} \nabla p$ ، معادله اوایلر به شکل زیر در خواهد آمد

$$-\partial_t \psi + h + \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \phi + \Phi = 0. \quad (6)$$

بنابراین  $(\rho, p, \psi)$  که حالت سیال را تعیین می‌کنند از طریق حل معادله‌های (۴) و (۶) به دست می‌آیند.

حال یک سیال را با حالت اولیه و مشخص  $(\rho_0, p_0, \psi_0)$  در نظر می‌گیریم. امواج صوتی و یا در حالت کلی، هر آشفتگی آکوستیکی در سیال به صورت اختلالانی در این حالت

در بخش ۲، نشان داده می‌شود که اختلالات به وجود آمده در یک سیال غیرلزج<sup>۵</sup>، باروتروپیک<sup>۶</sup> و ناچرخان<sup>۷</sup> توسط معادلاتی یکسان با انتشار یک میدان نرده‌ای با جفت‌شدگی کمینه در یک فضای خمیده توصیف می‌شوند. به عبارتی دیگر، اثباتی برای قضیه زیر ارائه می‌شود:

قضیه. معادله حرکت مربوط به پتانسیل سرعت یک آشفتگی آکوستیکی در یک سیال غیرلزج، باروتروپیک و ناچرخان همانند معادله انتشار یک میدان نرده‌ای با جفت‌شدگی کمینه در یک فضای چهاربعدي است، یعنی

$$\Delta \psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi) = 0, \quad (2)$$

که  $\psi$  میدان نرده‌ای،  $g$  و  $g_{\mu\nu}$  به ترتیب متریک فضای زمان و دترمینان آن هستند. در این حالت، پتانسیل سرعت نقش میدان نرده‌ای را ایفا می‌کند و همچنین متریک آکوستیک سیال جایگزین متریک فضای زمان می‌شود.

در بخش ۳ در رابطه با جریان‌های گردابه‌ای و متریک آکوستیک حاصل از آن بحث می‌شود. ملاحظه می‌شود که یک سیال با جریان گردابه‌ای رفتاری همانند یک سیاه‌چاله چرخان خواهد داشت. این موضوع در دو حالت وقتی که چگالی سیال ثابت و یا غیر ثابت باشد، بررسی خواهد شد.

در بخش ۴، حرکت امواج در جریان‌های گردابه‌ای با بررسی مسیرهای ژئودزیک<sup>۸</sup> در هندسه القایی در سیال مطالعه می‌شود و سپس شرایط لازم و کافی برای جذب امواج در سیاه‌چاله آکوستیک شکل گرفته به دست خواهد آمد.

در این مقاله، برای توصیف سیاه‌چاله‌ها از دستگاه واحدهای طبیعی استفاده خواهد شد. همچنین اندیس‌های یونانی که مقادیر ۰ تا ۴ را اختیار می‌کنند بیانگر مختصات فضای زمان و اندیس‌های لاتین با مقادیر ۱ تا ۳ نشان‌دهنده مختصات مکانی هستند.

## ۲. متریک آکوستیک وابسته به سیال

در این بخش، شکل معادلات حاکم بر انتشار امواج در یک سیال را به دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که این معادلات

با قرار دادن رابطه فوق در (۹) به دست می آید

$$-\frac{\rho_0}{c^2} \partial_t (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1) + \frac{\rho_0}{c^2} \cdot \nabla (c^2 \nabla \psi_1 - \vec{v}_0 (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1)) = 0, \quad (15)$$

که از تعریف سرعت صوت به شکل  $c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$  استفاده شده است.

با یافتن  $\psi_1$  از طریق حل معادله (۱۵)،  $p_1$  و  $\rho_1$  نیز به ترتیب از (۱۳) و (۱۴) تعیین می شوند.

رابطه (۱۵) را می توان به شکل تانسوری زیر بازنویسی کرد

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \psi_1) = 0, \quad (16)$$

که در آن

$$f^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_0^i & \vdots & c^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j \end{pmatrix}. \quad (17)$$

که  $\delta_{ij}$  نماد دلتای کرونکر است. با مقایسه (۲) و (۱۶) ملاحظه می شود که این دو معادله شکل و ساختار یکسانی دارند. در حقیقت اگر قرار دهیم  $f^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$ ، آنگاه هم ارزی بین انتشار میدان های نرده ای در فضا زمان خمیده با حرکت امواج در سیالات آشکار می شود. در این حالت خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \det(f^{\mu\nu}) &= \det(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \\ &= (\sqrt{-g})^4 g^{-1} \\ &= g \\ &= -\frac{\rho_0}{c^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

و بنابراین

$$g^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{1}{\rho_0 c} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_0^i & \vdots & c^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j \end{pmatrix}. \quad (19)$$

با یافتن وارون ماتریس فوق به دست می آید

خواهند بود. به عبارت دیگر، در حضور امواج آکوستیکی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \epsilon \rho_1 + O(\epsilon^2), \\ p &= p_0 + \epsilon p_1 + O(\epsilon^2), \\ \psi &= \psi_0 + \epsilon \psi_1 + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (7)$$

که  $\epsilon$  پارامتری بسیار کوچک است که با تقریب بسیار عالی از جمله ها با مرتبه  $\epsilon^2$  و بالاتر از آن در محاسبات چشم پوشی خواهیم کرد. البته این تقریب فقط در حالت کوچک بودن فرکانس امواج صحیح خواهد بود [۱۲-۱۳]. بنابراین با جایگذاری رابطه اخیر در (۴) و (۵)، می توان نحوه انتشار امواج آکوستیکی در یک سیال را بررسی کرد.

از خطی سازی معادله (۳) به دست می آید

$$\partial_t \rho_0 + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_0) = 0, \quad (8)$$

$$\partial_t \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{v}_0 + \rho_0 \vec{v}_1) = 0. \quad (9)$$

با فرض اینکه سیال باروتروپیک باشد (یعنی چگالی سیال فقط تابعی از فشار آن باشد)، آنگاه نتیجه می شود

$$\begin{aligned} h &= h_0 + \left(\frac{dh}{dp}\right)_{p=p_0} (p - p_0) + O(\epsilon^2) \\ &= h_0 + \frac{1}{\rho_0} (p - p_0) \\ &= h_0 + \epsilon \frac{p_1}{\rho_0} + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (10)$$

اکنون با جایگذاری رابطه های (۷) و (۱۰) در معادله اوایلر خواهیم داشت

$$-\partial_t \psi_0 + h_0 + \frac{1}{2} (\nabla \psi_0)^2 + \phi + \Phi = 0, \quad (11)$$

$$-\partial_t \psi_1 + \frac{p_1}{\rho_0} - \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1 = 0. \quad (12)$$

از معادله اخیر به دست می آید

$$p_1 = \rho_0 (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1). \quad (13)$$

چون سیال باروتروپیک است، پس

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} p_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1). \quad (14)$$

$$\partial_r(\rho r v^r) = 0 \Rightarrow \rho v^r = \frac{cte}{r}. \quad (22)$$

چون سیال ناچرخان است، برای مؤلفه زاویه‌ای سرعت خواهیم داشت

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{r} \partial_r(r v^\theta) = 0 \Rightarrow v^\theta = \frac{cte}{r}. \quad (23)$$

از طرفی دیگر، تکانه زاویه‌ای سامانه عبارت است از  $L = \rho V r v^\theta$  (که  $V$  برابر با حجم سامانه است). بنابراین پایستگی تکانه زاویه‌ای نتیجه می‌دهد

$$\frac{1}{r} \partial_r \left( \frac{L}{\rho V} \right) = \frac{1}{r} \partial_r(r v^\theta) = 0, \quad (24)$$

که در آن از رابطه (23) استفاده شده است. از این رو، پایستگی تکانه زاویه‌ای ایجاب می‌کند که چگالی سیال باید مقداری ثابت داشته باشد. با در نظر گرفتن این نکته در معادله (22)، سرعت جریان به صورت زیر تعیین می‌شود

$$\vec{v} = \frac{1}{r} (A, B). \quad (25)$$

$A$  و  $B$  اعداد ثابتی هستند که مقدار آن‌ها به وسیله شرایط اولیه مشخص می‌شود.

اکنون با توجه به روابط به دست آمده، متریک آکوستیک در این حالت به شکل زیر در خواهد آمد

$$ds^2 = - \left( c^2 - \frac{A^2 + B^2}{r^2} \right) dt^2 - 2 \frac{A}{r} dr dt - 2 B d\theta dt + dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (26)$$

که به دلیل ثابت بودن مقدار چگالی و سرعت صوت، بدون وارد شدن لطمه‌ای به کلیات مسئله، نسبت آن‌ها برابر واحد در نظر گرفته شده است.

با کمک تبدیلات

$$\begin{aligned} dt &\rightarrow dt - \frac{Ar}{r^2 c^2 - A^2} dr, \\ d\theta &\rightarrow d\theta - \frac{BA}{r(r^2 c^2 - A^2)}, \end{aligned} \quad (27)$$

متریک (6) به صورت زیر در می‌آید

$$g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{\rho_0}{c} \begin{pmatrix} -(c^2 - v_0^2) & : & -v_0^j \\ & : & \\ -v_0^i & : & \delta^{ij} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

و از این رو

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{\rho_0}{c} [-c^2 dt^2 + (dx^i - v_0^i dt) \delta_{ij} (dx^j - v_0^j dt)]. \quad (21)$$

این همان متریک آکوستیک وابسته به سیال است که به ویژگی‌های فیزیکی آن بستگی دارد. همان گونه که ملاحظه می‌شود، امضای<sup>۱۱</sup> متریک فوق عبارت است از  $(-, +, +, +)$ ، که این موضوع ماهیت لورنتسی هندسه القاشده در سیال را نشان می‌دهد. به منظور ایجاد یک افق رویداد صوتی، باید شرایطی را در سیال فراهم کرد که متریک آکوستیک شکلی مشابه با متریک شوارتزشیلد داشته باشد. در بخش بعد، روشی ساده برای به وجود آوردن افق رویداد صوتی در یک سیال ناچرخان و باروتروپیک معرفی خواهد شد.

### ۳. جریان‌های گردابه‌ای و تشکیل افق رویداد آکوستیک

#### ۳-۱. سیال با چگالی ثابت

یک روش مؤثر و البته ساده برای ایجاد افق رویداد صوتی، به وجود آوردن یک جریان گردابه‌ای در یک سیال است. به عنوان مثال، سیالاتی که جریان تخلیه وان حمام دارند، هندسه‌ای القاشده مشابه با سیاهچاله‌های چرخان دارند [۱۴]. در این حالت، علاوه بر یک افق رویداد صوتی یک ارگوسفر نیز به عنوان یکی از مشخصه‌های سیاهچاله‌های چرخان شکل می‌گیرد.

یک جریان تخلیه وان حمام<sup>۱۱</sup>  $(2+1)$  بعدی را با یک سینک یا سوراخ در مرکز آن برای تخلیه در نظر بگیرد. در مختصات قطبی، سرعت جریان سیال به صورت  $\vec{v} = (v^r, v^\theta)$  نوشته می‌شود. با کمک معادله پیوستگی می‌توان مؤلفه شعاعی سرعت را تعیین کرد

گردابه‌ای در یک سیال می‌تواند به ایجاد یک سیاهچاله آکوستیک منجر شود.

### ۲-۳. سیال با چگالی غیر ثابت

در بخش قبل، چگالی سیال و سرعت صوت هر دو برابر با مقداری ثابت در نظر گرفته شدند. در اینجا موضوع در حالت کلی یعنی وقتی که مقدار چگالی ثابت نباشد بررسی می‌شود.

اگر متریک (۲۱) را برای یک هندسه چرخان  $(2 + 1)$  بعدی در نظر بگیریم، آنگاه خواهیم داشت

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (dr - v^r dt)^2 + (rd\theta - v^\theta dt)^2 \quad (31)$$

که با به کارگیری تبدیلات

$$dt \rightarrow dt - \frac{v^r}{c^2 - (v^r)^2} dr, \quad (32)$$

$$d\theta \rightarrow d\theta - \frac{v^\theta}{r} \frac{v^r}{c^2 - (v^r)^2} dr,$$

به دست می‌آید

$$ds^2 = \frac{\rho}{c} \left( \frac{c^2}{c^2 - (v^r)^2} dr^2 + (v^2 - c^2) dt^2 - 2rv^\theta dt d\theta + r^2 d\theta^2 \right). \quad (33)$$

اکنون همانند قبل فرض می‌کنیم  $\rho = c$ ، اما با این تفاوت که  $c = c(r)$  تابعی از مکان است. در این صورت، از معادله

$$(22) \text{ نتیجه می‌شود } v^r = \frac{A'}{rc(r)} \text{ (توجه شود که مقدار } A' \text{ لزوماً برابر } A \text{ در معادله (25) نیست و درواقع در صورتی که چگالی ثابت فرض شود، آنگاه می‌توان نوشت } A = \frac{A'}{\rho} \text{ و همچنین از معادله (23) خواهیم داشت } v^\theta = \frac{B}{r} \text{ بنابراین متریک (33) بدین شکل در می‌آید}$$

$$ds^2 = \frac{\rho}{c} \left( \frac{c^2}{c^2 - (v^r)^2} dr^2 + (v^2 - c^2(r)) dt^2 - 2Bdt d\theta + r^2 d\theta^2 \right), \quad (34)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$ds^2 = -(c^2(r)f(r) - \left(\frac{B}{r}\right)^2) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 - 2Bdt d\theta + r^2 d\theta^2, \quad (35)$$

که در آن

$$f(r) = 1 - \frac{(v^r)^2}{c^2(r)} = 1 - \frac{A'^2}{r^2 c^4(r)}. \quad (36)$$

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{A^2 + B^2}{c^2 r^2} \right) c^2 dt^2 + \left( 1 - \frac{A^2}{c^2 r^2} \right)^{-1} dr^2 - 2Bd\theta dt + r^2 d\theta^2. \quad (28)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود یک ناحیه ارگوسفر<sup>۱۲</sup> (که از مشخصه‌های سیاهچاله‌ای چرخان است) وجود دارد که به وسیله مرز زیر محصور شده است (جایی که ضریب  $dt^2$  برابر صفر شود)

$$r_{ergo} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{c}, \quad (29)$$

و همچنین یک افق رویداد در مکان

$$r_H = \frac{|A|}{c} \quad (30)$$

قرار دارد. علامت مثبت  $A$  معادل با یک افق صوتی گذشته و علامت منفی بیانگر وجود یک افق صوتی آینده است. توجه شود که علامت  $A$  تأثیری در ماهیت ارگوسفر و مفاهیم فیزیکی مرتبط با آن ندارد. همچنین توجه شود که اگرچه در حالت  $B = 0$ ، متریک (۲۸) به شکل متریک (۱) درمی‌آید، اما از منظر تجربی تحقق آن ممکن نیست، زیرا بی‌نظمی‌های موجود در سیال حرکات چرخشی در آن ایجاد می‌کنند و بنابراین مطالعه هندسه شوارتزشیلد از این طریق میسر نخواهد بود.

در ناحیه  $r < r_H$ ، سیال با سرعتی بیش از سرعت صوت جریان دارد، به عبارتی دیگر یک ناحیه فراصوت تشکیل شده است؛ اما در  $r > r_H$ ، سرعت جریان از سرعت صوت کمتر است که بیانگر وجود یک ناحیه فروصوتی است. همچنین در  $r = r_H$  یا همان افق رویداد که مرز جداکننده دو ناحیه فروصوتی و فراصوتی است، سیال با سرعتی برابر سرعت صوت حرکت می‌کند. به بیانی دیگر، در فاصله‌های دور از مرکز، سیال با سرعتی کمتر از صوت جریان دارد که با نزدیک شدن بیشتر به مرکز، سرعت جریان به تدریج افزایش می‌یابد تا در نهایت در افق رویداد مقدار آن برابر سرعت صوت شود. با عبور جریان از افق، سرعت جریان از سرعت صوت تجاوز می‌کند؛ بنابراین ملاحظه می‌شود که جریان

دیگر جهت تحقق ویژگی‌های نظریه نسبیت محسوب و به کار گرفته شود.

#### ۴-۱. مسیرهای ژئودزیک در جریان گردابه‌ای با چگالی ثابت

با نوشتن لاگرانژی مربوط به متریک (۲۸)، خواهیم داشت

$$2\mathcal{L} = -\left(c^2 - \frac{A^2 + B^2}{r^2}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{A^2}{c^2 r^2}\right)^{-1} \dot{r}^2 - 2B\dot{\theta}\dot{t} + r^2\dot{\theta}^2, \quad (40)$$

که علامت نقطه نشان‌دهنده مشتق نسبت به زمان ویژه  $\tau$  است. چون لاگرانژی به‌طور صریح به متغیرهای  $t$  و  $\theta$  بستگی ندارد، بنابراین تکانه‌های متناظر با آن‌ها یعنی  $p_t$  و  $p_\theta$  باید پایسته باشند:

$$p_t = -\left(c^2 - \frac{A^2 + B^2}{r^2}\right)\dot{t} - B\dot{\theta} = -\frac{E'}{m} = E, \quad (41)$$

$$p_\theta = r^2\dot{\theta} - B\dot{t} = \frac{L'}{m} = L, \quad (42)$$

که  $E'$  و  $L'$  به ترتیب انرژی و تکانه زاویه‌ای فونون هستند و  $m$  مقدار جرمی از سیال است که توسط فونون آشفته شده است. برای سادگی کار در محاسبات،  $m$  با  $E'$  و  $L'$  ادغام شده است و به ترتیب ثابت‌های  $E$  و  $L$  تعریف شده‌اند. بنابراین

$$2\mathcal{L} = -E\dot{t} + L\dot{\theta} + \left(1 - \frac{A^2}{c^2 r^2}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 0. \quad (43)$$

با بازنویسی معادله (۴۲) به شکل

$$\dot{t} = \frac{1}{B}(r^2\dot{\theta} - L), \quad (44)$$

و جایگذاری این نتیجه در (۲۲) به دست می‌آید

$$E = \left(c^2 - \frac{A^2 + B^2}{r^2}\right)\frac{1}{B}(r^2\dot{\theta} - L) + B\dot{\theta}. \quad (45)$$

با حل معادله فوق به ازای  $\dot{\theta}$ ، نتیجه می‌شود

$$\dot{\theta} = \frac{L\left(c^2 - \frac{A^2 + B^2}{r^2}\right) + EB}{r^2 c^2 - A^2}. \quad (46)$$

معرفی یک نیم‌رخ چگالی هنگامی که نوعی سپر جرمی در اطراف سیاهچاله وجود دارد می‌تواند بسیار مفید باشد. می‌توان یک چنین نیم‌رخ چگالی<sup>۱۳</sup> را با تعریف تابع سرعت صوت به شکل زیر معرفی کرد

$$c(r) = 2 - \frac{1}{r^n}, \quad (37)$$

که  $n$  می‌تواند هر مقدار حقیقی و مثبتی داشته باشد، باین حال به‌منظور انجام محاسبات از اینجا به بعد، مقدار آن صحیح و مثبت در نظر گرفته می‌شود. با تعریف نیم‌رخ چگالی به‌صورت مذکور نمی‌توان نتیجه تحلیلی از افق رویداد و ناحیه ارگوسفر ارائه کرد. باین حال با قرار دادن  $A = 1$ ، مکان افق رویداد در  $r_H = 1$  خواهد بود. همچنین مرز ناحیه ارگوسفر با افزایش مقدار  $n$  سریعاً به شکل زیر کاهش می‌یابد

$$r_{ergo} \sim \frac{1}{4}\sqrt{A^2 + 4B^2}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (38)$$

که برای چرخش‌های بزرگ به دست می‌آید

$$r_{ergo} \sim \frac{B}{2}, \quad B \rightarrow \infty. \quad (39)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، با فرض ثابت نبودن مقدار چگالی، افق رویداد و ناحیه ارگوسفر دارای دینامیک خواهند بود و برای بررسی دقیق رفتار سامانه نیازمند انجام محاسبات عددی است.

#### ۴. انتشار امواج در جریان‌های گردابه‌ای

در نسبیت عام، حرکت ذرات از طریق حل معادلات ژئودزیک توصیف می‌شود؛ بنابراین انتظار می‌رود که با مشخص شدن متریک آکوستیک وابسته به جریان‌های گردابه‌ای، این امکان وجود داشته باشد تا بتوان نحوه حرکت فونون‌ها به‌عنوان واحدهای امواج را در آن‌ها بررسی کرد. از این طریق خواهیم دید که این نوع از سامانه‌ها به‌خوبی قادر به در به دام انداختن امواج و جلوگیری از انتشار آن‌ها هستند. از طرفی اگرچه پیش‌بینی‌های نسبیت عام به‌صورت رصدی و تجربی از طریق داده‌های مختلف اخترفیزیکی تأیید شده‌اند، اما بررسی سامانه‌های آنالوگ نیز می‌تواند به‌عنوان روشی

نیروهای لخت ناشی از چرخش سیال، مسیر حرکت فونونها دارای کششی در جهت این چرخش خواهد بود که این کاملاً مشابه با اثر کشش چارچوب در فضا زمانهای چرخان در نسبیت عام می‌باشد. همچنین از معادله (۵۳) مشاهده می‌شود که در این حالت تکانه زاویه‌ای کل برابر  $L_{total} = \frac{EB}{c^2}$  است که نشان می‌دهد در حضور یک سیاه‌چاله چرخان آکوستیک، مفهوم ژئودزیک با تکانه زاویه‌ای صفر معنی ندارد.

معادله‌های ۴۹ تا ۵۱ در حالتی که  $L = 0$  باشد، به صورت زیر درمی‌آیند

$$\dot{r}^2 = \frac{E^2}{c^2}, \quad (54)$$

$$\dot{\theta} = \frac{EB}{c^2 r^2 - A^2}, \quad (55)$$

$$\dot{t} = E \frac{r^2}{c^2 r^2 - A^2}. \quad (56)$$

اکنون با کمک روابط فوق می‌توان معادلات حرکت مربوط به فونونها با تکانه زاویه‌ای صفر را نوشت

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left( c - \frac{A^2}{cr^2} \right), \quad (57)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{B}{r^2}. \quad (58)$$

در شکل ۲، ژئودزیک‌های مربوط به امواج صوتی که با زاویه اولیه  $\theta = 0$  از بی‌نهایت وارد می‌شوند به ازای  $B = 0, 1, 5, 10$  نشان داده شده‌اند (فرض شده است که  $A = c = 1$ ). همان‌گونه که انتظار می‌رفت، در فاصله‌های دور از سیاه‌چاله، ذرات با یک پارامتر تأثیر محدود حرکت می‌کنند؛ بنابراین بر اساس معادله (۵۳)، مسیرهای پیمایش با پارامتر تأثیر صفر وجود ندارند. در واقع، این ژئودزیک‌ها یک تکانه زاویه‌ای مؤثر برابر  $L_{total} = \frac{EB}{c^2}$  دارند. از این رو، برای تشکیل ژئودزیک‌هایی با پارامتر تأثیر صفر باید تکانه زاویه‌ای به صورت  $L = -L_{fluid} = -\frac{EB}{c^2}$  به وجود آورد تا مقدار تکانه زاویه‌ای کل برابر صفر شود.

با جایگذاری (۴۶) و (۴۴) در (۴۳) و حل معادله به ازای  $\dot{r}^2$  خواهیم داشت

$$\dot{r}^2 = \frac{(A^2 + B^2)L^2 - L(2BE + c^2L)r^2 + E^2r^4}{c^2r^4}. \quad (47)$$

با تعریف پارامتر تأثیر<sup>۱۴</sup> به صورت

$$D = \frac{L}{E}, \quad (48)$$

معادلات ژئودزیک به شکل زیر نوشته می‌شوند

$$\dot{r}^2 = L^2 \frac{A^2 + B^2 - \left(\frac{2B}{D} + c^2\right)r^2 + \frac{r^4}{D^2}}{c^2r^4}, \quad (49)$$

$$\dot{\theta} = L \frac{c^2 - \frac{A^2 + B^2}{r^2} + \frac{B}{D}}{r^2 c^2 - A^2}, \quad (50)$$

$$\dot{t} = L \frac{\frac{r^2}{D} - B}{r^2 c^2 - A^2}. \quad (51)$$

معادله (۵۰) به ازای فاصله‌های بزرگ به شکل زیر درمی‌آید

$$r^2 \dot{\theta} = L + \frac{EB}{c^2}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (52)$$

که نشان می‌دهد که مقدار چرخش سیاه‌چاله آکوستیکی در بی‌نهایت نیز اثرگذار است. در واقع، تکانه زاویه‌ای کل فونون برابر است با

$$L_{total} = r^2 \dot{\theta} = L + \frac{EB}{c^2}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (53)$$

با یادآوری این مطلب که مقدار تکانه زاویه‌ای سیال عبارت است از  $L = mrv^\theta$ ، که در حقیقت همان جمله دوم در معادله (۵۳) است؛ بنابراین ملاحظه می‌شود که تکانه زاویه‌ای کل حاصل جمع تکانه زاویه‌ای فونون و تکانه زاویه‌ای سیال است. در ادامه مسیر حرکت فونونها در دو حالت وجود و عدم وجود تکانه زاویه‌ای برای آنها بررسی می‌شود.

#### الف. ژئودزیک‌های پوچ<sup>۱۵</sup> با تکانه زاویه‌ای صفر

با قرار دادن  $L = 0$ ، فونونها خود دارای تکانه زاویه‌ای نخواهند بود، اما چون با توجه به اینکه خود جریان سیال دارای چرخش است، بنابراین فونونها در این حالت نیز نمی‌توانند حرکت شعاعی داشته باشند. در واقع، به دلیل وجود

ب. ژئودزیک‌های پوچ دایره‌ای و پارامتر تأثیر بحرانی

در اینجا یک نوع از مهم‌ترین ژئودزیک‌ها یعنی ژئودزیک‌های دایره‌ای که به ازای آن‌ها  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$  است بررسی می‌شود. شتاب شعاعی فونون را می‌توان از طریق معادله  $V_{eff}^2 = E^2 - \dot{r}^2$  محاسبه کرد. در حقیقت داریم

$$\ddot{r} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} V_{eff}^2, \quad (59)$$

بنابراین

$$\ddot{r} = L^2 \frac{-2(A^2 + B^2) + \left(\frac{2B}{D} + c^2\right) r^2}{c^2 r^5}. \quad (60)$$

از حل معادله‌های (49) و (60) به ازای  $r_c$  یا همان شعاع مدار دایره‌ای به دست می‌آید

$$r_c = \frac{\sqrt{2(A^2 + B^2) \mp B\sqrt{A^2 + B^2}}}{c}. \quad (61)$$

علامت‌های منفی و مثبت به ترتیب بیانگر مدارهای همسوگرد<sup>۱۶</sup> (در جهت چرخش سیال) و ناهمسوگرد<sup>۱۷</sup> (در خلاف جهت چرخش سیال) هستند. در حالتی که چرخش وجود نداشته باشد ( $B = 0$ )، خواهیم داشت

$$r_c = \frac{\sqrt{2A}}{c} = \sqrt{2}r_H, \quad B = 0. \quad (62)$$

به ازای چرخش‌های خیلی بزرگ نیز نتیجه می‌شود

$$r_c \sim r_H, \quad B \rightarrow \infty, \quad \text{همسوگرد} \quad (63)$$

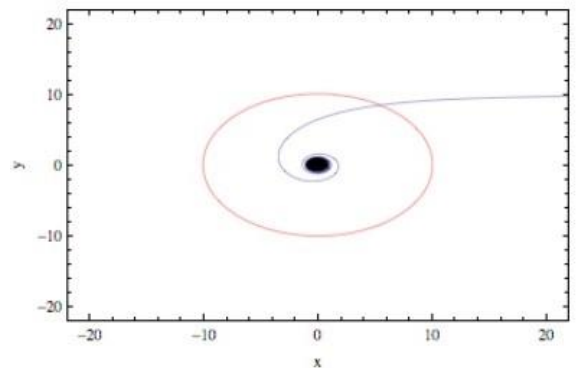
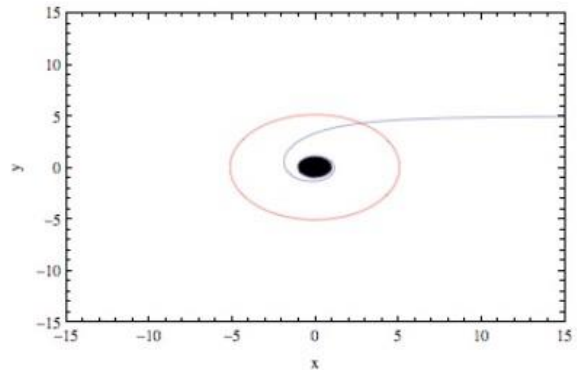
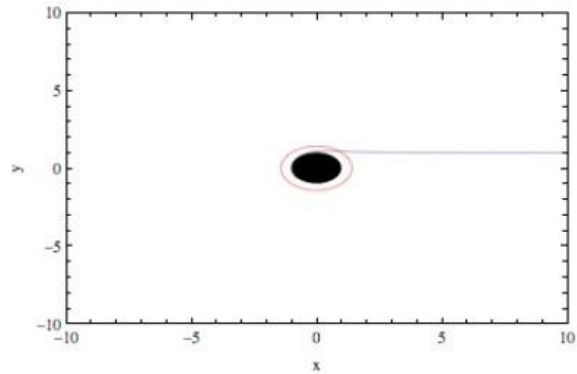
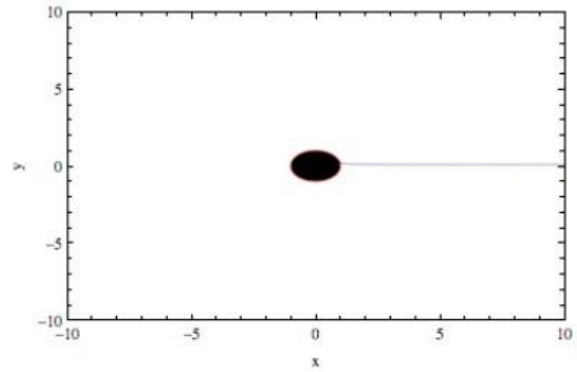
$$r_c \sim \frac{2B}{c} \sim 2r_{ergo}, \quad B \rightarrow \infty, \quad \text{ناهمسوگرد} \quad (64)$$

که سرعت زاویه‌ای هر مدار برابر است با

$$\frac{d\theta}{dt} = c^2 \frac{B \pm \sqrt{A^2 + B^2}}{2A^2}. \quad (65)$$

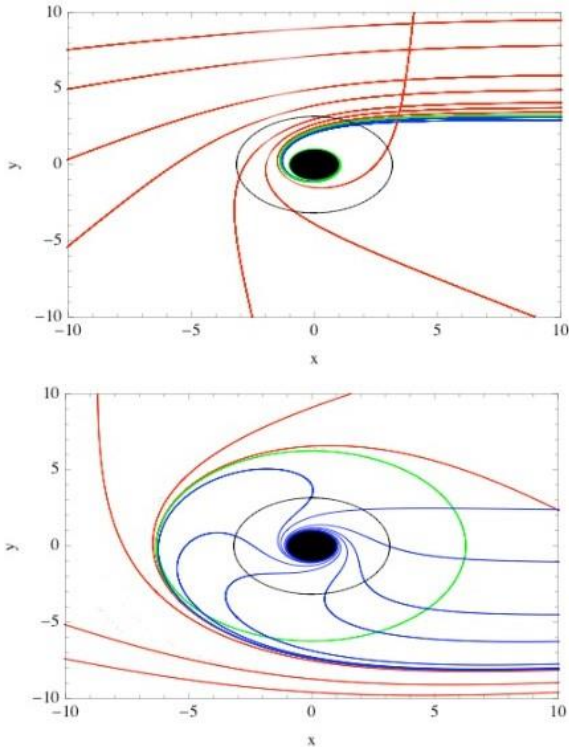
همچنین پارامتر تأثیر مربوط به ژئودزی‌های پوچ دایره‌ای با پارامتر تأثیر بحرانی برای به دام انداختن فونون منطبق است که عبارت است از

$$D_c = -2(B \pm \sqrt{A^2 + B^2}), \quad (66)$$



شکل ۲. منحنی‌های آبی‌رنگ ژئودزیک‌های با تکانه زاویه‌ای صفر ( $L = 0$ ) به ازای  $B = 0, 1, 5, 10$  به ترتیب از بالا به پایین هستند. دایره قرمز رنگ نشان‌دهنده ارگوسفر است.

ناهمسوگرد به داخل سیاهچاله بیشتر از امواج همسوگرد است، اما این موضوع در رابطه با فونون‌های پراکنده‌شونده برعکس است، یعنی در حالت همسوگرد بودن امواج احتمال پراکنده شدن توسط سیاهچاله بیشتر از امواج ناهمسوگرد خواهد بود.



شکل ۴. ژنودزیک‌های مربوط به امواج همسوگرد و ناهمسوگرد به ترتیب از بالا به پایین به ازای  $B = 3$ . منحنی‌های آبی‌رنگ فونون‌هایی را نشان می‌دهند که به داخل سیاهچاله سقوط می‌کنند. منحنی‌های سبزرنگ بیانگر ژنودزیک‌های پوچ بحرانی و منحنی‌های قرمز رنگ بیانگر مسیرهای پراکنده‌شونده هستند.

#### ۴-۲. مسیرهای ژنودزیک در جریان گردابه‌ای با چگالی غیر ثابت

با نوشتن چگالی لاگرانژی برای متریک (۳۵)، به دست می‌آید

$$2\mathcal{L} = -\left(c^2(r)f(r) - \frac{B^2}{r^2}\right)\dot{t}^2 + \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2 - 2B\dot{\theta}\dot{t} + r^2\dot{\theta}^2, \quad (69)$$

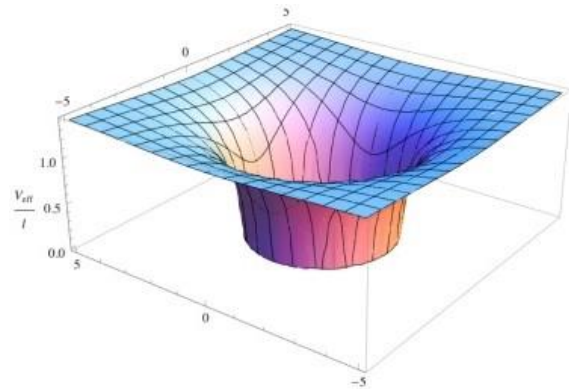
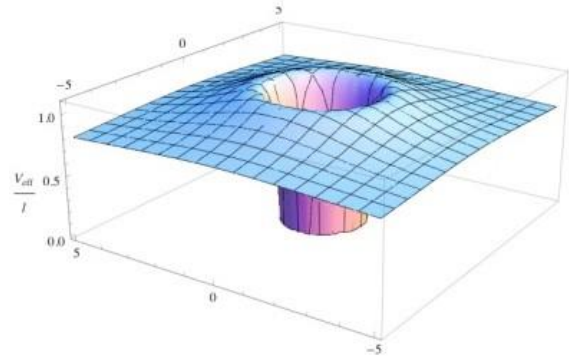
که برای ژنودزی‌های پوچ داریم  $\mathcal{L} = 0$  همانند قبل، دو کمیت  $p_\theta = -\frac{E'}{m} = E$  و  $p_t = \frac{L'}{m} = L$  پایسته هستند که مقدار آن‌ها برابر است با

که علامت‌های منفی و مثبت همانند قبل به ترتیب مربوط به حالت‌های همسوگرد و ناهمسوگرد هستند. برای چرخش‌های خیلی بزرگ، رابطه فوق به صورت زیر درمی‌آید

$$D_c \sim 0, \quad B \rightarrow \infty, \quad \text{همسوگرد} \quad (67)$$

$$D_c \sim -4B \sim -4r_{ergo}, \quad B \rightarrow \infty \quad \text{ناهمسوگرد} \quad (68)$$

دلیل اینکه برای چرخش‌های بزرگ، امواج همسوگرد جذب نمی‌شوند، از معادله (۵۳) مشخص می‌شود. در این حالت، سرعت زاویه‌ای سیاهچاله در بی‌نهایت اثرگذار است و بنابراین تکانه زاویه‌ای کل موج ورودی هنگامی که به سیاهچاله نزدیک می‌شود بسیار بزرگ‌تر از مقدار تکانه زاویه‌ای اولیه آن خواهد بود؛ اما این موضوع برای امواج ناهمسوگرد کاملاً متفاوت خواهد بود و به همان دلیل در چرخش‌های بزرگ، این نوع امواج جذب می‌شوند. شکل ۳ تغییرات پتانسیل مؤثر را برحسب پارامتر تأثیر به ازای  $B = 3$  در یک زمان ثابت نشان می‌دهد.



شکل ۳. پتانسیل مؤثر  $V_{eff}/L$  به ازای پارامتر تأثیر  $D = D_c \pm 1$

در شکل ۴ نیز تعدادی از ژنودزیک‌های همسوگرد و ناهمسوگرد با تکانه‌های زاویه‌ای متفاوت نشان داده شده‌اند؛ بنابراین به طور خلاصه می‌توان گفت که احتمال سقوط امواج

ب. ژئودزیک‌های پوچ دایره‌ای و پارامتر تأثیر بحرانی

با کمک معادله (۵۹) می‌توان شتاب شعاعی فونون را به صورت زیر محاسبه کرد

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{2D^2r^5c^3(r)} [4BD(r^2 - BD)c(r) - 2r(r^2 - BD)^2\partial_r c(r) + D^2r^2c^3(r)(2f(r) - r\partial_r f(r))]. \quad (۸۲)$$

برای ژئودزیک‌های دایره‌ای باید داشته باشیم  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$  حال فرض می‌شود که سرعت صوت مطابق با رابطه (۳۷) باشد. نتایج مربوط به شعاع مدارهای دایره‌ای پوچ و پارامتر تأثیر بحرانی آن‌ها را نمی‌توان برای این نیم‌رخ چگالی به طور تحلیلی و دقیق حل نمود؛ بنابراین نتایج عددی را برای این مدارها به ازای  $A = 1$  که معادل با  $r_H = 1$  است بررسی می‌شود.

تحلیل‌های عددی نشان می‌دهد که با افزایش  $B$ ، مدارهای همسوگرد به  $r_H$  یعنی افق رویداد نزدیک می‌شوند و پارامتر تأثیر مربوطه عددی بسیار کوچک خواهد بود. درحالی‌که مدارهای ناهمسوگرد به سمت  $B \sim 2r_{erg}$  میل می‌کنند و پارامتر تأثیر در این حالت به مقدار  $B$  نزدیک می‌شود. هرچقدر مقدار  $n$  بزرگ‌تر باشد، تأثیر کمتری بر ژئودزیک‌ها خواهد داشت. همچنین به ازای مقادیر بزرگ  $n$  برای مسیرهای ناهمسوگرد داریم

$$r_c \sim \sqrt{\frac{A^2}{8} + \frac{B^2}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{A^2B^2 + 4B^4}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (۸۳)$$

$$D_c \sim \frac{-2B^2 - \sqrt{B^2(A^2 + 4B^2)}}{4B}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (۸۴)$$

نتایج به دست آمده به ازای  $n = 0$  با حالتی که چگالی ثابت باشد تطابق دارد و با مقادیری که از معادله‌های (۶۱) و (۶۶) به دست آمد یکسان است. در شکل ۵، یک نمودار عددی از تحول سرعت زاویه‌ای  $\frac{d\theta}{dt}$  برحسب پارامتر چرخش  $B$  برای ذرات همسوگرد در مدارهای پوچ دایره‌ای رسم شده است. همان‌گونه که انتظار می‌رفت، برای چرخش‌های بزرگ داریم  $\frac{d\theta}{dt} = B$ . همانند حالتی که مقدار چگالی ثابت بود، تکانه زاویه‌ای ذرات در هنگام انتشار در سیال با تکانه زاویه‌ای آن

$$E = -(c^2(r)f(r) - \frac{B^2}{r^2})\dot{t} + B\dot{\theta}, \quad (۷۰)$$

$$L = r^2\dot{\theta} - B\dot{t}. \quad (۷۱)$$

بنابراین نتیجه می‌شود که

$$-E\dot{t} + L\dot{\theta} + \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2 = 0. \quad (۷۲)$$

با بازنویسی (۷۱) به شکل (۴۴) و جایگذاری آن در (۷۰) به دست می‌آید

$$E = (c^2(r)f(r) - \frac{B^2}{r^2})\dot{t} \frac{1}{B}(r^2\dot{\theta} - L) + B\dot{\theta}. \quad (۷۳)$$

از این رو معادلات ژئودزیک به شکل زیر مشخص می‌شوند

$$\dot{r}^2 = L^2 \frac{B^2 - \left(\frac{2B}{D} + c^2(r)f(r)\right)r^2 + \frac{r^4}{D^2}}{c^2(r)r^4}, \quad (۷۴)$$

$$\dot{\theta} = L \frac{\frac{B}{D} + \left(c^2(r)f(r) - \frac{B^2}{r^2}\right)}{c^2(r)r^2f(r)}, \quad (۷۵)$$

$$\dot{t} = L \frac{\frac{r^2}{D} - B}{c^2(r)r^2f(r)}. \quad (۷۶)$$

الف. ژئودزیک‌های پوچ با تکانه زاویه‌ای صفر

اگر فونون دارای تکانه زاویه‌ای نباشد، باید قرار داد  $L = 0$  بنابراین معادله‌های ۷۴ تا ۷۶ به شکل زیر درمی‌آیند

$$\dot{r}^2 = \frac{E^2}{c^2(r)}, \quad (۷۷)$$

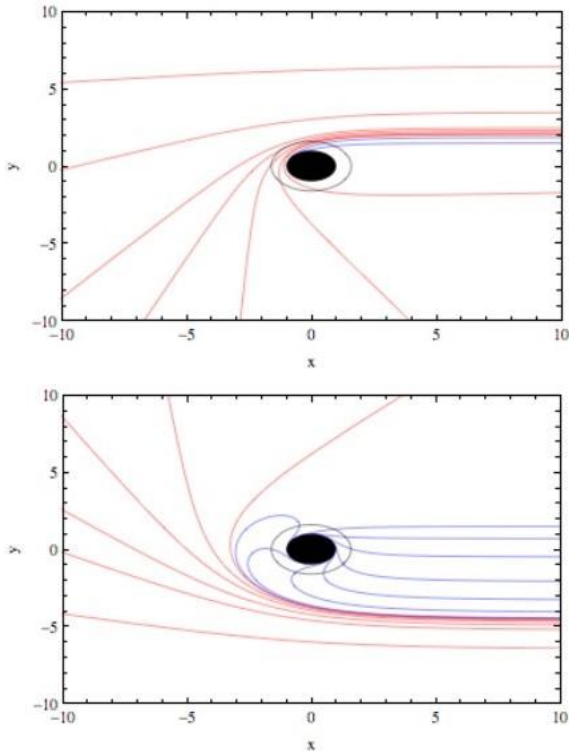
$$\dot{\theta} = \frac{EB}{c^2(r)r^2f(r)}, \quad (۷۸)$$

$$\dot{t} = \frac{E}{c^2(r)f(r)}. \quad (۷۹)$$

در نتیجه، معادلات حرکت فونون‌ها در این حالت عبارت‌اند از

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{c(r)}{f(r)}, \quad (۸۰)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{B}{r^2}. \quad (۸۱)$$



شکل ۶. ژئودزیک‌های امواج همسوگرد و ناهمسوگرد در یک سیال با چگالی غیر ثابت به ترتیب از بالا به پایین به ازای  $B = 3$ . منحنی‌های آبی رنگ نشان‌دهنده ژئودزیک‌های جذب‌شونده و منحنی‌های قرمز رنگ بیانگر ژئودزیک‌های پراکنده‌شونده هستند.

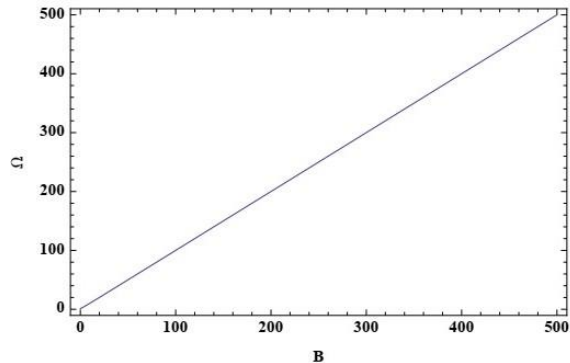
## ۵. بحث و نتیجه‌گیری

سیالاتی که دارای جریان‌های گردابه‌ای هستند می‌توانند شرایط مشابهی با سیاه‌چاله‌های چرخان به وجود آورند. در این حالت یک افق رویداد آکوستیک تشکیل می‌شود که در صورت ورود امواج به ناحیه محصورشده توسط آن، وارد شده دیگر امکان انتشار نخواهد داشت.

عواملی چون شرایط اولیه موج از جمله تکانه زاویه‌ای آن و میزان چرخش سیاه‌چاله در تعیین سرنوشت نهایی موج اثرگذار هستند. موج وارد شده یا توسط سیاه‌چاله جذب و از ادامه انتشار بازمی‌ماند یا اینکه از مسیر اولیه خود منحرف و پراکنده خواهد شد. محاسبه مقدار پارامتر تأثیر بحرانی مشخص می‌کند که یک موج جذب یا پراکنده خواهد شد. اگر پارامتر تأثیر مربوط به یک موج از مقدار بحرانی کوچک‌تر باشد، موج جذب، و در صورتی که بزرگ‌تر از آن مقدار باشد، موج پراکنده می‌شود.

جمع خواهد شد. در حالت نیمرخ چگالی مربوط به (۳۷)، مقدار تکانه زاویه‌ای کل ذراتی که از بی‌نهایت می‌آیند برابر است با

$$L_{total} = L + \frac{EB}{4}. \quad (۸۵)$$



شکل ۵. سرعت زاویه‌ای ذرات همسوگرد در مدار دایره‌ای پوچ بر حسب  $B$

توجه شود که گرچه پارامتر تأثیر  $D$  در (۵۸) تعریف شده است، اما برای به دست آوردن فاصله عمودی بین مسیر موج و مرکز سیاه‌چاله، باید آن را در سرعت صوت ضرب کرد و از آنجا که برای چرخش‌های بزرگ از رابطه (۳۷) داریم  $c \sim 2$ ، بنابراین فاصله تأثیری را که یک ناظر در این شرایط می‌بیند برابر  $\frac{L_{total}}{E}$  نخواهد بود، بلکه برابر است با

$$\frac{2}{E} \left( L + \frac{EB}{4} \right). \quad (۸۶)$$

در شکل ۶، ژئودزی‌های همسوگرد و ناهمسوگرد به ازای مقادیر مختلفی از تکانه زاویه‌ای نشان داده شده‌اند. در اینجا نیز همانند قسمت قبل، احتمال پراکنده شدن امواج همسوگرد بیشتر از جذب آن‌ها توسط سیاه‌چاله است. در واقع، هرچقدر که پارامتر تأثیر موج بزرگ‌تر باشد، با شدت بیشتری پراکنده خواهد شد. با عبور زاویه پراکندگی از مقدار بحرانی، امواج جذب خواهند شد. اما در مورد امواج ناهمسوگرد، موضوع متفاوت خواهد بود و احتمال جذب شدن این نوع امواج بیشتر خواهد بود. در هر صورت به‌طور کلی فارغ از همسوگرد بودن یا ناهمسوگرد بودن موج ورودی، امکان جذب یا پراکنده شدن وجود دارد که این موضوع نیز توسط شرایط اولیه موج و سیال مشخص می‌شود.

یکی دیگر از پدیده‌های مرتبط با سیاه‌چاله‌ها تابش هاوکینگ<sup>۱۹</sup> است. این فرایند که از اثرات کوانتومی خلأ ناشی می‌شود، پیش‌بینی می‌کند که سیاه‌چاله‌ها با ساطع کردن تشعشعاتی به‌مرور زمان انرژی خود را از دست می‌دهند [۲۱-۲۰]. در نتیجه با گذشت زمان کافی، سیاه‌چاله به‌طور کامل تبخیر<sup>۲۰</sup> و افق رویداد ناشی از آن ناپدید می‌شود. البته نرخ تابش هاوکینگ برای سیاه‌چاله‌های اخت‌فیزیکی بسیار کوچک پیش‌بینی می‌شود و از این‌رو تاکنون از طریق رصد و به‌طور تجربی مشاهده نشده است. با این‌حال این پدیده در برخی سامانه‌های آنالوگ از سیاه‌چاله‌ها مشاهده و اندازه‌گیری شده است [۲۴-۲۲، ۵]. با توجه به اینکه تابش هاوکینگ در دماهای بسیار کم قابل توجه و قابل مشاهده است [۲۶-۲۵]، بنابراین در رابطه با اکثر سامانه‌های آنالوگ که در دمای معمولی عمل می‌کنند، اثر آن قابل چشم‌پوشی است. بنابراین با توجه به اینکه مدل مطرح‌شده در دماهای معمولی قابل پیاده‌سازی است، می‌توان نتیجه گرفت که در نظر گرفتن وجود تابش هاوکینگ برای این مدل تأثیر چندانی بر محاسبات و نتایج به‌دست آمده نخواهد گذاشت.

### سپاسگزاری

نویسندگان از پژوهشگاه جنگ دانشگاه دافوس که با حمایت‌ها و پشتیبانی‌های لازم شرایط انجام این تحقیق را فراهم آورد، تشکر و قدردانی می‌کنند.

### مراجع

- [1] Du J, Li T, Xu Z, Tang J, Qi Q, Meng F. Structure-activity relationship in microstructure design for electromagnetic wave absorption applications. *Small Structures*. 2023 Nov;4(11):2300152.
- [2] Li J, Zhou D, Wang PJ, Du C, Liu WF, Su JZ, Pang LX, Cao MS, Kong LB. Recent progress in two-dimensional materials for microwave absorption applications. *Chemical Engineering Journal*. 2021 Dec 1;425:131558.
- [3] Qu S, Sheng P. Microwave and acoustic absorption metamaterials. *Physical Review Applied*. 2022 Apr 1;17(4):047001.
- [4] Sharma S, Sudhakara P, Singh J, Singh S, Singh G. Emerging progressive developments in the fibrous composites for acoustic applications.

تکانه زاویه‌ای اولیه موج یکی از عوامل تأثیرگذار در مقدار پارامتر تأثیر آن می‌باشد. از آنجاکه در یک جریان گردابه‌ای، خود سیال دارای تکانه زاویه‌ای است، موج با نزدیک شدن به سیاه‌چاله یک تکانه زاویه‌ای در جهت چرخش سیاه‌چاله به دست خواهد آورد. بدین ترتیب امواج همسوگرد با نزدیک‌تر شدن به افق رویداد تکانه زاویه‌ای بزرگ‌تر در جهت اولیه خود خواهند داشت، درحالی‌که امواج ناهمسوگرد حین انتشار به سمت سیاه‌چاله، از تکانه زاویه‌ای آن‌ها کاسته می‌شود. بنابراین احتمال جذب امواج ناهمسوگرد از امواج همسوگرد زیادتر است، در صورتی‌که امکان پراکندگی امواج همسوگرد بیشتر است.

یک پدیده مهم در سیاه‌چاله‌های چرخان ابرتابش<sup>۱۸</sup> است. در ابرتابش، یک موج با دریافت بخشی از چرخش سیاه‌چاله، با انرژی بیش از انرژی اولیه خود پراکنده می‌شود [۱۵]. از سامانه‌های شناخته‌شده‌ای که ابرتابش در آن‌ها به وقوع می‌پیوندد می‌توان از پراکندگی امواج الکترومغناطیسی به‌وسیله یک استوانه چرخان از جنس یک ماده رسانا نام برد [۱۶]. این پدیده باعث ناپایداری و کاهش انرژی سیاه‌چاله می‌شود. ویژگی‌های موج ورودی از جمله فرکانس آن و میزان چرخش سیاه‌چاله از عوامل تأثیرگذار در وقوع ابرتابش هستند. هرچقدر که فرکانس یک موج بیشتر باشد، احتمال رخداد ابرتابش برای آن موج نیز کمتر است. درحالی‌که با افزایش مقدار چرخش سیاه‌چاله، امکان رخداد ابرتابش افزایش می‌یابد. نشان داده شده است که سازوکاری مشابه با این فرایند در سامانه‌های آنالوگ از سیاه‌چاله‌ها نیز وجود دارد [۱۸-۱۷]. انتظار می‌رود که این پدیده در جریان‌های گردابه‌ای در داخل یک سیال نیز امکان وقوع داشته باشد [۱۹] و بنابراین بررسی و تحقیق در خصوص آن برای مدل مطرح‌شده ضروری به نظر می‌رسد. مطالعه این موضوع برای شناسایی عوامل دخیل در آن و در نتیجه ارائه راه‌کارهایی برای جلوگیری از وقوع آن به‌منظور به حداکثر رساندن بازدهی سامانه اهمیت دارد و می‌تواند موضوع تحقیقات بعدی در این زمینه باشد.

- [19] Torres T, Patrick S, Coutant A, Richartz M, Tedford EW, Weinfurtner S. Observation of superradiance in a vortex flow. arXiv preprint arXiv:1612.06180. 2016 Dec 19.
- [20] Hawking SW. Black hole explosions?. *Nature*. 1974 Mar 1;248(5443):30-1.
- [21] Hawking SW. Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics*. 1975 Aug;43(3):199-220.
- [22] Steinhauer J. Observation of self-amplifying Hawking radiation in an analogue black-hole laser. *Nature Physics*. 2014 Nov;10(11):864-9.
- [23] Steinhauer J. Observation of quantum Hawking radiation and its entanglement in an analogue black hole. *Nature Physics*. 2016 Oct;12(10):959-65.
- [24] Muñoz de Nova JR, Golubkov K, Kolobov VI, Steinhauer J. Observation of thermal Hawking radiation and its temperature in an analogue black hole. *Nature*. 2019 May 30;569(7758):688-91.
- [25] Shafiee M. Correction to black hole radiation due to pair annihilation. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*. 2022 Mar;2022(3):033E03.
- [26] Shafiee M, Bahrapour Y. Quantum vacuum effects on the formation of black holes. *Journal of High Energy Physics*. 2023 Jun;2023(6):1-8.
- Journal of Manufacturing Processes. 2023 Sep 29;102:443-77.
- [5] Horstmann B, Reznik B, Fagnocchi S, Cirac JJ. Hawking radiation from an acoustic black hole on an ion ring. *Physical review letters*. 2010 Jun 25;104(25):250403.
- [6] Lahav O, Itah A, Blumkin A, Gordon C, Rinott S, Zayats A, Steinhauer J. Realization of a sonic black hole analog in a Bose-Einstein condensate. *Physical review letters*. 2010 Dec 10;105(24):240401.
- [7] Leonhardt U, Philbin TG. The case for artificial black holes. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2008 Aug 28;366(1877):2851-7.
- [8] Patrick S, Goodhew H, Gooding C, Weinfurtner S. Backreaction in an analogue black hole experiment. *Physical Review Letters*. 2021 Jan 29;126(4):041105.
- [9] Pelat A, Gautier F, Conlon SC, Semperlotti F. The acoustic black hole: A review of theory and applications. *Journal of Sound and Vibration*. 2020 Jun 23;476:115316.
- [10] Hobson MP, Efstathiou GP, Lasenby AN. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge university press; 2006 Feb 2.
- [11] Unruh WG. Experimental black-hole evaporation?. *Physical Review Letters*. 1981 May 25;46(21):1351.
- [12] Rieutord M. *Fluid dynamics: an introduction*. Springer; 2014 Dec 26.
- [13] White FM. *Fluid mechanics 8th edition*.
- [14] Berti E, Cardoso V, Lemos JP. Quasinormal modes and classical wave propagation in analogue black holes. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*. 2004 Dec 15;70(12):124006.
- [15] Press WH, Teukolsky SA. Floating orbits, superradiant scattering and the black-hole bomb. *Nature*. 1972 Jul 28;238(5361):211-2.
- [16] Richartz M, Weinfurtner S, Penner AJ, Unruh WG. Generalized superradiant scattering. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*. 2009 Dec 15;80(12):124016.
- [17] Cardoso V, Lemos JP, Yoshida S. Quasinormal modes and stability of the rotating acoustic black hole: Numerical analysis. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*. 2004 Dec 15;70(12):124032.
- [18] Chakraborty C, Majumdar P. Spinning gyroscope in an acoustic black hole: precession effects and observational aspects. *The European Physical Journal C*. 2020 Jun;80(6):493.

## پی نوشتها

1. event horizon
2. Schwarzschild space-time
3. subsonic
4. supersonic
5. inviscid
6. barotropic
7. irrotational
8. geodesic
9. specific enthalpy
10. signature
11. draining bathtub
12. ergosphere
13. density profile
14. impact parameter
15. null
16. co-rotating
17. counter-rotating
18. superradiance
19. Hawking radiation
20. evaporation