

مقاله پژوهشی

DOR: 20.1001.1.24767131.1403.10.1.12.4

درصد همانندی: ۳٪

مطالعه فرایند توزیع مجدد انرژی جنبشی در لایه مرزی آشفته بدون گرادیان فشار با استفاده از شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ

امین موسائی^{۱ و ۲*}

moosaie@yu.ac.ir

^۱ نویسنده مسئول، دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران.

moosaie@iut.ac.ir

^۲ نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران.

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۳/۲۱

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۰۳/۱۲

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۰۸

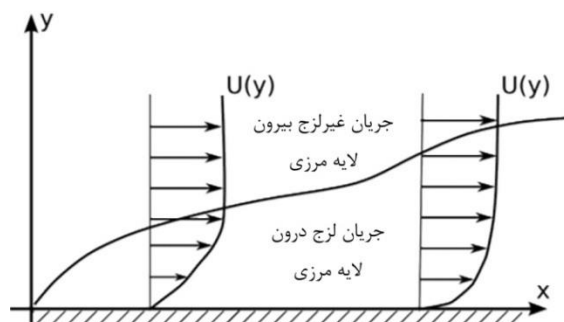
چکیده

در این پژوهش، فرایند توزیع مجدد انرژی در جریان لایه مرزی آشفته روی صفحه تخت بدون گرادیان فشار در اعداد رینولدز مختلف با استفاده از نتایج شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ مطالعه شده است. برای این منظور، معادلات ناویر-استوکس فیلتر شده سه‌بعدی و وابسته به زمان برای جریان تراکم‌ناپذیر یک سیال نیوتنی به‌طور عددی حل شده‌اند. تنش‌های زیر شبکه به کمک مدل لزجت گردابه محلی تطبیق‌شونده با دیوار محاسبه شده‌اند. از یک شرط مرزی ورودی نوسانی برای تولید آشفتگی فیزیکی در مرز ورودی استفاده شده که باعث کوتاه شدن طول صفحه موردنیاز برای انجام شبیه‌سازی و در نتیجه کاهش حجم محاسبات شده است. کمیت‌های آماری آشفته به‌دست آمده از شبیه‌سازی حاضر با داده‌های موجود تجربی و شبیه‌سازی مستقیم عددی مقایسه و دقت بالای شبیه‌سازی نشان داده شده است. از این داده‌ها برای مطالعه فرایند توزیع مجدد انرژی جنبشی آشفته درون لایه مرزی استفاده شده و بدین ترتیب رفتار تنش‌های نرمال رینولدز توضیح داده شده‌اند. همچنین از مقایسه با نتایج شبیه‌سازی مستقیم عددی، دقت شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ در توصیف فرایند توزیع مجدد انرژی جنبشی بررسی شده است. مشاهده می‌شود که تکنیک شبیه‌سازی گردابه بزرگ، مقادیر قدر مطلق ماکزیمم و مینیمم مؤلفه‌های قطر اصلی تانسور همبستگی بین نوسان‌های فشار و کرنش را کمتر از مقدار دقیق شبیه‌سازی مستقیم عددی پیش‌بینی می‌کند.

واژه‌های کلیدی: شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ، لایه مرزی آشفته، مدل زیر شبکه WALE، فرایند توزیع مجدد انرژی

۱. مقدمه

جریان لایه مرزی آشفته گذرنده از روی سطوح تخت بدون گرادیان فشار در بسیاری از کاربردهای مهندسی پیش می‌آید. به‌عنوان مثال می‌توان از جریان لایه مرزی اتمسفر بر روی سطح زمین و نیز جریان لایه مرزی شکل گرفته بر روی بدنه هواپیما، زیردریایی و اژدر نام برد. به‌طور سنتی، هدف تحقیقات، محاسبه ضریب اصطکاک سطحی و در برخی کاربردها ضریب انتقال حرارت جابجایی آشفته بوده است. همچنین این مسئله یکی از مسائل بنیادین در مکانیک سیالات است که مطالعه نظری، تجربی و عددی آن منجر به درک بسیاری از پیچیدگی‌های جریان آشفته و مکانیزم تولید و استهلاك انرژی جنبشی آشفته در نزدیکی دیوار شده است. چنین دانش بنیادی کمک بسیاری به توسعه مدل‌های آشفتگی، روش‌های کنترل آشفتگی در لایه مرزی و کاهش درگ نموده است. در جریان یک سیال لزج بر روی یک صفحه تخت، همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، به دلیل شرط عدم لغزش سرعت روی مرز صفر بوده و درون ناحیه‌ای نزدیک به دیوار به تدریج رشد می‌کند تا به سرعت جریان خارجی می‌رسد. این ناحیه لایه مرزی نامیده می‌شود و در اعداد رینولدز بالا، نسبت به ابعاد مسئله، معمولاً یک لایه نازک است. مطابق شکل ۱، به دلیل شکل هندسی نمایه سرعت، درون لایه مرزی و در نزدیکی دیوار یک گرادیان سرعت وجود دارد. چنانچه عدد رینولدز به اندازه کافی بالا باشد به طوری که به ناپایداری‌ها اجازه رشد دهد، سرعت‌های نوسانی در جریان ایجاد می‌شوند. وجود سرعت‌های نوسانی در دو جهت موازی دیوار به همراه گرادیان سرعت متوسط موجب تولید انرژی جنبشی آشفته شده و در نتیجه آشفتگی تقویت می‌گردد تا جایی که جریان آشفته به حالت کاملاً توسعه یافته برسد.



شکل ۱. طرح‌واره لایه مرزی و نمایه سرعت روی صفحه تخت

در حالت توسعه یافته، طیف وسیع و پیوسته‌ای از گردابه‌ها در لایه مرزی شکل می‌گیرد. در این میان، یک مکانیزم آشفتگی برای انتقال انرژی جنبشی آشفتگی از گردابه‌های بزرگ به گردابه‌های کوچک وجود دارد. در کوچک‌ترین مقیاس‌ها، انرژی جنبشی توسط لزجت مولکولی مستهلک و تبدیل به حرارت می‌شود؛ بنابراین، برای شبیه‌سازی یک لایه مرزی آشفته، نیاز به حل همه مقیاس‌های فضایی و زمانی جریان از بزرگ‌ترین تا کوچک‌ترین است. یک چنین حل عددی از معادلات ناویر-استوکس را یک شبیه‌سازی مستقیم عددی (DNS) می‌نامند [۱]. تکنیک DNS نیاز به هیچ‌گونه مدل‌سازی آشفتگی ندارد و بسیار دقیق جریان آشفته را پیش‌بینی می‌کند، به‌نحوی که آن را آزمایشگاه عددی می‌نامند؛ اما حجم محاسبات مورد نیاز آن بسیار بالا بوده و با افزایش عدد رینولدز به سرعت افزایش می‌یابد. به دلیل حجم بالای محاسبات DNS و عدم امکان انجام آن در اعداد رینولدز بالا، نیاز به روش‌های جایگزین با حجم محاسبات کمتر و دقت قابل قبول است. یکی از این روش‌ها، مدل‌سازی آماری آشفتگی (RANS) است که فقط کمیت‌های میانگین را به دست می‌دهد. این روش مستلزم مدل‌سازی همه مقیاس‌های جریان است. در نتیجه سهم مدل آشفتگی در حل جریان بسیار زیاد بوده و بنابراین در بسیاری از مسائل پیچیده دقت نسبتاً پایینی دارد. مطالعات آزمایشگاهی، نظری و شبیه‌سازی‌های مستقیم عددی نشان داده‌اند که مقیاس‌های کوچک آشفتگی که مسئول استهلاك انرژی جنبشی هستند، با تقریب بسیار خوبی ایزوتروپ و همگن هستند. همچنین رفتار آن‌ها تقریباً عمومی و مستقل از مسئله است. در حالی که مقیاس‌های بزرگ که حامل بخش اعظم انرژی جنبشی هستند، بسیار پیچیده، غیر ایزوتروپ، ناهمگن و نیز وابسته به مسئله هستند؛ بنابراین به ذهن متبادر می‌شود که برای شبیه‌سازی یک جریان آشفته، مقیاس‌های بزرگ حل و مقیاس‌های کوچک مدل شوند. مزیت این روش اولاً در این است که سهم مدل آشفتگی در فرایند حل نسبت به روش RANS بسیار کمتر و محدود به اثر مقیاس‌های کوچک می‌شود. ثانیاً به دلیل رفتار ایزوتروپ و همگن مقیاس‌های کوچک، درک دینامیک آن‌ها از طریق تئوری آماری

کمکی است که در آن نمایه سرعت آشفتنه ایجاد شده و به دامنه اصلی حل منتقل می‌شود. چنین روشی نیز مستلزم حجم محاسبات نسبتاً بالایی است. در ادامه به روش جدیدتری اشاره می‌شود که حجم محاسبات قابل قبولی دارد. این روش برای مطالعه جریان‌های توسعه‌یافته مفید به نظر می‌رسد و در این مقاله هم از آن استفاده شده است.

لاند و همکاران [۸] یک شرط مرزی ورودی نوسانی برای شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ جریان لایه مرزی آشفتنه ارائه دادند. طبق این روش، سرعت لحظه‌ای در مکانی در پایین دست جریان استخراج می‌شود. با تفریق سرعت متوسط از سرعت لحظه‌ای، سرعت نوسانی در آن مکان به دست می‌آید. سپس این سرعت نوسانی به نمایه سرعت متوسط در مرز ورودی افزوده می‌شود تا یک نمایه سرعت ورودی آشفتنه ایجاد شود. از آنجا که لایه مرزی در محل استخراج سرعت نوسانی نسبت به ورودی رشد کرده و ضخیم‌تر شده است، نیاز به تغییر اطلاعات استخراج شده با استفاده از تناسب میان ضخامت‌های لایه مرزی در ورودی و در مکان استخراج سرعت نوسانی است. آن‌ها به کمک این روش، LES جریان لایه مرزی آشفتنه از $Re_{\theta} = 1531$ تا حدود $Re_{\theta} = 2150$ (که در آن Re_{θ} عدد رینولدز برحسب ضخامت اندازه حرکت لایه مرزی است) را با استفاده از مدل زیر شبکه دینامیکی [۵] انجام دادند و تطابق خوبی با نتایج موجود مشاهده نمودند. آن‌ها از روش تفاضل محدود برای حل عددی معادلات ناویر - استوکس فیلترشده استفاده کردند. علاوه بر این، مانهارت [۹] از روش آن‌ها برای شبیه‌سازی مستقیم عددی لایه مرزی آشفتنه در $Re_{\theta} = 300$ استفاده کرد.

اینو و پولین [۱۰] شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ لایه مرزی صفحه تخت بدون گرادیان فشار را تا اعداد رینولدز بسیار بالا انجام دادند. اینو و همکاران [۱۱] شبیه‌سازی گردابه بزرگ لایه مرزی صفحه تخت را در حضور گرادیان فشار معکوس ارائه نمودند. چنگ و همکاران [۱۲] فرایند جدایی و بازچسبش در لایه مرزی صفحه تخت را به کمک LES مطالعه نمودند. آرولا و دارین [۱۳] به کمک LES لایه مرزی در حال توسعه را روی یک سطح محدب بررسی

توربولانس امکان‌پذیر است؛ بنابراین می‌توان مدل‌هایی با دقت نسبتاً بالا برای آن‌ها استخراج نمود. علاوه بر این، از آنجا که مقیاس‌های کوچک رفتار عمومی و مستقل از مسئله دارند، مدل‌های ارائه شده در این روش، برخلاف مدل‌های RANS، برای طیف وسیعی از مسائل قابل استفاده هستند. به این روش، شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ (LES) می‌گویند [۲ و ۳]. فرایند جداسازی مقیاس‌های بزرگ از مقیاس‌های کوچک با اعمال یک اپراتور فیلتر بر روی میدان جریان صورت می‌گیرد.

به دلیل وجود طیف وسیعی از گردابه‌ها در LES، برخلاف RANS که تنها شامل میدان جریان متوسط است، شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ روشی مفید برای بررسی مسائلی مانند مطالعه فیزیک آشفتگی، آیرودینامیک، احتراق در جریان آشفتنه و کاهش درگ به کمک روش‌های مختلف است که در آن‌ها سرعت‌های نوسانی و ساختمان‌های آشفتنه نقش اساسی بازی می‌کنند. از طرف محققان مختلف، تعدادی مدل زیر شبکه پیشنهاد شده است. از این میان می‌توان به مدل قدیمی و مشهور اسم‌گورینسکی [۴] و نیز مدل‌های جدیدتر دینامیکی [۵]، دینامیکی لاگرانژی [۶]، لزجت گردابه محلی تطبیق شونده با دیوار (WALE) [۷] و ... اشاره نمود. در مقاله حاضر، از مدل زیر شبکه WALE به دلیل دقت نسبتاً بالایی آن، مدل کردن صحیح دینامیک آشفتگی در نزدیکی دیوار و نیز سادگی نسبی آن استفاده می‌شود.

برای انجام DNS و LES یک لایه مرزی آشفتنه، چند راه کلی وجود دارد. اولین راه این است که از یک نمایه سرعت جریان لایه مرزی آرام (به دست آمده از حل بلازیوس) شروع کرده و سپس اجازه داد که جریان به طور طبیعی از مرحله گذار عبور کرده و به جریان آشفتنه توسعه یافته برسد. این روش برای مطالعه پدیده گذار سودمند است؛ اما چنانچه تنها جریان توسعه یافته مورد نظر باشد، در این صورت نیاز به یک دامنه حل بسیار بزرگ است، در حالی که نتایج تنها در بخش انتهایی دامنه مورد استفاده قرار می‌گیرد. به دلیل حجم بالای محاسبات، این روش در شبیه‌سازی جریان‌های توسعه یافته چندان مطلوب نیست. روش دوم استفاده از یک دامنه حل

که در آن u_i ، p ، ρ و ν به ترتیب میدان سرعت، میدان فشار، چگالی و لزجت سینماتیکی سیال هستند. در معادلات فوق و دیگر معادلات ارائه شده در این مقاله، از قاعده جمع اندیس اینشتین استفاده شده است، یعنی بر روی اندیس تکراری عمل جمع انجام می‌شود.

برای توصیف یک جریان آشفته با استفاده از معادلات فوق، باید تمامی مقیاس‌های فضایی و زمانی جریان توسط شبیه‌سازی عددی حل شوند. به این روش حل جریان‌های آشفته، شبیه‌سازی مستقیم عددی (DNS) می‌گویند. در یک جریان آشفته، طیف کامل و پیوسته‌ای از مقیاس‌های فضایی و زمانی موجود است و با افزایش عدد رینولدز، این طیف وسیع‌تر می‌شود؛ بنابراین DNS مستلزم حجم محاسبات بسیار بالایی به‌ویژه در اعداد رینولدز بالا است. یک روش مناسب که حد واسط بین دقت بالا و حجم محاسبات پایین است به نام شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ (LES) خوانده می‌شود. در این روش، مقیاس‌های کوچک جریان فیلتر شده و تنها مقیاس‌های بزرگ که بخش اعظم انرژی جنبشی آشفته را حمل می‌کنند، حل می‌شوند؛ بنابراین شبکه محاسباتی می‌تواند نسبت به DNS نقاط گرهی کمتری داشته باشد و حجم محاسبات مورد نیاز پایین می‌آید. در عین حال، از آنجاکه بخش اعظم انرژی جنبشی آشفته حل می‌شود، این روش دقت نسبتاً زیادی در مقایسه با روش مدل‌سازی آماری (RANS) دارد.

با اعمال اپراتور فیلتر بر روی معادله‌های (۱) و (۲)، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{\text{SGS}}}{\partial x_j} \quad (4)$$

که در آن

$$\tau_{kl}^{\text{SGS}} = \overline{u_k u_l} - \tilde{u}_k \tilde{u}_l \quad (5)$$

علامت \sim بر روی یک کمیت نشان‌دهنده کمیت فیلتر شده است. تانسور متقارن τ_{ij}^{SGS} در معادله (۴) به دلیل فیلتر گرفتن از عبارت غیرخطی شتاب جابجایی در معادله (۲) ظاهر شده

نمودند. رادهاکریشن و همکاران [۱۴] به کمک یادگیری ماشین، به مدل‌سازی دیوار برای LES لایه مرزی پرداختند.

در مقاله حاضر، شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ جریان در لایه مرزی آشفته روی صفحه تخت بدون گرادین فشار در چهار عدد رینولدز مختلف، از مقدار نسبتاً پایین $Re_\theta = 303$ تا نسبتاً بالای $Re_\theta = 6931$ ارائه شده است. در هر عدد رینولدز، نتایج به‌دست‌آمده با نتایج تجربی و DNS موجود در منابع مختلف مقایسه و تطابق بسیار خوبی مشاهده شده است. سپس داده‌های به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی، برای مطالعه فرایند توزیع مجدد انرژی به کار رفته‌اند. نوآوری‌های موجود در این مقاله نسبت به کارهای قبلی عبارت‌اند از (۱) استفاده از شرط مرزی ورودی نوسانی به همراه تکنیک LES با مدل زیر شبکه WALE به همراه روش گسسته‌سازی حجم محدود، (۲) بررسی قابلیت این روش شبیه‌سازی در عدد رینولدز نسبتاً بالای $Re_\theta = 6931$ و (۳) مطالعه فرایند توزیع مجدد انرژی جنبشی آشفته در لایه مرزی.

ادامه این مقاله به شرح زیر سازمان یافته است. بخش ۲ شرحی از تئوری به کار گرفته شده و معادلات حاکم را در بر دارد. مدل زیر شبکه WALE در بخش ۳ توضیح داده شده است. تعریف مسئله و پارامترهای آن و نیز شرایط مرزی در بخش ۴ ارائه شده‌اند. روش‌های عددی به‌کاررفته برای انجام شبیه‌سازی در بخش ۵ مرور شده‌اند و نتایج شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ در چهار عدد رینولدز مختلف در بخش ۶ ارائه شده‌اند.

۲. تئوری و معادلات حاکم

جریان تراکم ناپذیر و تک‌دمای یک سیال نیوتنی در نظر گرفته می‌شود. دینامیک سیال توسط معادلات پیوستگی و ناویر-استوکس توصیف می‌شود:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2)$$

کنیم، آنگاه با این شرط که نرخ استهلاک متوسط زیر شبکه برابر با ε باشد، رابطه زیر برای C_s به دست می‌آید [۷]:

$$C_s = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3C_k}{2} \right)^{-3/4}$$

با در نظر گرفتن مقدار $C_k \approx 1.4$ برای ثابت کولموگوروف، مقدار $C_s = 0.18$ برای ثابت اسمانگورینسکی به دست می‌آید.

در مدل‌های زیرشبکه مبتنی بر لزجت گردابه فرض می‌شود که آشفتگی به‌طور میانگین سبب استهلاک انرژی جنبشی آشفتنه با یک فرایند آبخاری می‌شود. بدین معنا که انرژی جنبشی از مقیاس‌های بزرگ به سمت کوچک‌ترین مقیاس‌های موجود در LES جریان دارد و در نهایت در کوچک‌ترین مقیاس‌های موجود، توسط مدل زیرشبکه مستهلک می‌شود. در ضمن، قابل ذکر است که آبخار انرژی لحظه‌ای، یک فرایند انتقال انرژی یک‌طرفه از مقیاس‌های بزرگ به مقیاس‌های کوچک نبوده و انتقال انرژی در جهت عکس نیز اتفاق می‌افتد (فرایند برگشت انرژی) [۱۶].

مدل اسمانگورینسکی ساده‌ترین و قدیمی‌ترین مدل زیرشبکه موجود است که با حجم محاسبات کم و پایداری عددی بالا، جذابیت بسیار دارد؛ اما دقت آن نیز محدود است. یکی از مشکلات اساسی این مدل، ناتوانی در پیش‌بینی رفتار جریان آشفتنه در نزدیکی دیوار است. در نزدیکی دیوار از شدت آشفتگی کاسته شده و جریان به تدریج آرام می‌شود (زیر لایه لزج)؛ بنابراین لزجت گردابه باید با نزدیکی به دیوار به تدریج به سمت صفر میل کند. مدل اسمانگورینسکی به‌تنهایی قادر به پیش‌بینی چنین رفتاری برای لزجت گردابه نیست. برای رفع این مشکل یا باید از توابع میراکننده لزجت گردابه استفاده کرد (مانند تابع ω در ω -مدل) و یا مدل‌های زیرشبکه پیشرفته‌تر را به کار برد. در این مقاله، از مدل زیرشبکه لزجت گردابه محلی تطبیق‌شونده با دیوار (WALE) استفاده می‌شود که از مدل‌های نسبتاً جدید محسوب می‌شود. این مدل قادر به تشخیص دیوار بوده و در نتیجه رفتار حدی لزجت گردابه در نزدیکی دیوار را تضمین می‌کند. همچنین، از دقت بالایی در LES جریان‌های آشفتنه آزاد و یا در نزدیکی دیوار حتی در

است و به آن تانسور تنش زیر شبکه می‌گویند. معادله‌های (۳) و (۴) دینامیک مقیاس‌های بزرگ را توصیف می‌کنند، زیرا مقیاس‌های کوچک با عمل فیلتر کردن حذف شده‌اند. تنش زیر شبکه اثر مقیاس‌های حذف‌شده بر مقیاس‌های موجود را نمایندگی می‌کند. در این حالت، مدل‌سازی جریان آشفتنه به مدل کردن τ_{ij}^{SGS} کاهش می‌یابد که مدل زیرشبکه نامیده می‌شود.

در یک جریان آشفتنه، استهلاک انرژی جنبشی با مقیاس‌های کوچک صورت می‌گیرد. از آنجاکه در LES این مقیاس‌ها حذف شده‌اند، مدل زیر شبکه باید به اندازه کافی باعث استهلاک انرژی شود. در غیر این صورت، به دلیل انباشته شدن انرژی جنبشی در مقیاس‌های بزرگ، شبیه‌سازی پایداری عددی نخواهد داشت.

یک مدل زیرشبکه مشهور، مدل اسمانگورینسکی [۴] است که مبتنی بر فرضیه لزجت گردابه می‌باشد. با تجزیه تانسور τ_{ij}^{SGS} به بخش‌های کروی و انحرافی، بخش کروی $\tau_{kk}^{SGS}/3$ در عبارت گرادیان فشار معادله (۴) جذب شده و بخش انحرافی τ_{ij}^{SGS} نیز با رابطه

$$\tau_{ij}^{SGS} = -2\nu_T \bar{S}_{ij} \quad (6)$$

مدل می‌شود. رابطه (۶) در تشابه با قانون لزجت نیوتن می‌باشد. \bar{S}_{ij} تانسور نرخ کرنش فیلترشده است:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

ν_T نیز لزجت گردابه است که طبق مدل اسمانگورینسکی از رابطه

$$\nu_T = (C_s \Delta)^2 |\bar{S}| \quad |\bar{S}| = (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2} \quad (8)$$

محاسبه می‌شود. در این مدل Δ عرض فیلتر است و اغلب با رابطه $\Delta = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z}$ تعریف می‌شود که در آن Δx ، Δy و Δz به ترتیب اندازه سلول محاسباتی در جهات x ، y و z هستند. ثابت اسمانگورینسکی نیز در اغلب مسائل بین ۰/۱ تا ۰/۲ در نظر گرفته می‌شود. همچنین، طبق پیشنهاد لیلی [۱۵]، چنانچه عدد موج قطع کردن فیلتر $k_c = \pi/\Delta$ را در ناحیه ایرنسی آبخار انرژی یعنی $E(k) = C_k \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ فرض

مرتبۀ دوم به کار گرفته شده و بدین ترتیب یک مدل زیرشبکه مرتبۀ دوم حاصل شده است. از آنجا که گسسته‌سازی معادلات ناویر - استوکس در کد فوق نیز مرتبۀ دوم است، نیازی به مدل زیرشبکه مرتبۀ بالاتر نبوده و خطای گسسته‌سازی مدل زیرشبکه هم‌مرتبۀ با خطای گسسته‌سازی معادلات جریان است.

۴. تعریف مسئله، پارامترها و شرایط مرزی

در این پژوهش، جریان لایه مرزی بر روی یک صفحه تخت بدون گرادیان فشار در نظر گرفته می‌شود. هندسه مسئله در شکل ۲ نشان داده شده است. کمیت‌های جریان در یک دستگاه مختصات کارترین مطابق شکل ۲ تعریف شده‌اند. در این دستگاه، x جهت اصلی جریان، y جهت عرضی و z جهت عمود بر دیوار را نشان می‌دهد. صفحه تخت در مکان $z = 0$ قرار دارد. عرض صفحه تخت زیرین در جهت y بی‌نهایت است. اما در یک شبیه‌سازی عددی امکان حل مسئله با یک صفحه با عرض نامحدود وجود ندارد. بنابراین قسمتی از عرض صفحه تخت برای حل مسئله در نظر گرفته می‌شود. اندازه این قسمت باید آن قدر بزرگ باشد تا تعداد کافی از ساختمان‌های بزرگ جریان آشفتۀ در نزدیکی دیوار را در خود جای دهد و همبستگی‌های سرعت نیز در آن فاصله به صفر برسند. مقدار عرض صفحه که در این پژوهش استفاده شده بر اساس شبیه‌سازی‌های مستقیم عددی دیگر محققان انتخاب شده است [۹ و ۱۷]. طول دامنه حل در جهات x ، y و z به ترتیب با L_x ، L_y و L_z نشان داده می‌شود که مقادیر آن‌ها در ادامه آورده شده است.

به دلیل وجود شرط عدم لغزش، سرعت باید از صفر بر روی دیوار به سرعت جریان خارجی U_∞ برسد، که این سبب تشکیل لایه مرزی بر روی دیوار می‌شود. کمیت‌های متوسط تابع x و z هستند. البته تغییرات آن‌ها با x کند است. y جهت همگن مسئله است. بنابراین، برای بهبود کیفیت میانگین‌گیری، کمیت‌های جریان علاوه بر زمان، در جهت همگن y نیز میانگین گرفته شده‌اند.

هندسه‌های پیچیده برخوردار است. در بخش بعد اصول این مدل ارائه شده‌اند.

۳. مدل زیرشبکه WALE

این مدل را نیکود و داکروس در سال ۱۹۹۹ [۷] ارائه کردند و از آن زمان تاکنون برای حل مسائل گوناگون به‌خوبی از آن استفاده شده است. مدل WALE برخلاف مدل استاتیکی اسماغورینسکی، یک مدل دینامیکی محسوب می‌شود. بدین معنا که پارامترهای آن در خلال روند حل به‌عنوان تابعی از کمیت‌های جریان محاسبه می‌شوند، برخلاف مدل اسماغورینسکی که پارامتر آن (G_S) از ابتدا تعیین شده و همواره در طول شبیه‌سازی در همه نقاط شبکه مقدار ثابتی دارد.

مدل WALE بر اساس تانسور گرادیان سرعت مقیاس‌های حل‌شده (تانسور گرادیان سرعت فیلتر شده) طراحی شده است. بدین ترتیب که برای محاسبه لزجت گردابه رابطه زیر را پیشنهاد می‌کند:

$$v_T = (C_W \Delta)^2 \frac{(\tilde{S}_{ij}^d \tilde{S}_{ij}^d)^{3/2}}{(\tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij})^{5/2} + (\tilde{S}_{ij}^d \tilde{S}_{ij}^d)^{5/4}} \quad (9)$$

که در آن

$$\tilde{S}_{ij}^d = \tilde{S}_{ik} \tilde{S}_{kj} + \tilde{\Omega}_{ik} \tilde{\Omega}_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} [\tilde{S}_{mn} \tilde{S}_{mn} - \tilde{\Omega}_{mn} \tilde{\Omega}_{mn}] \quad (10)$$

در رابطه فوق $\tilde{\Omega}_{ij}$ تانسور نرخ چرخش فیلتر شده است:

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

و \tilde{S}_{ij} تانسور نرخ کرنش فیلتر شده است که توسط رابطه (۷) تعریف می‌شود. همچنین در [۷] راهی برای محاسبه دینامیکی ثابت C_W ارائه شده است.

مدل WALE که در بالا توضیح داده شد، در کد مورداستفاده برنامه‌نویسی شده است. برای محاسبه مشتق‌های موجود در تانسور گرادیان سرعت، یک روش تفاضل متناهی

بدین ترتیب می‌توان فاصله از دیوار z و سرعت متوسط $\langle u \rangle$ را به طریق زیر بی‌بعد کرد:

$$z^+ = \frac{zu_\tau}{\nu}, \quad u^+ = \frac{\langle u \rangle}{u_\tau} \quad (16)$$

همچنین مقادیر rms نوسان‌های سرعت به طریق زیر با مقیاس داخلی بی‌بعد می‌شوند:

$$u_{\text{rms}}^+ = \frac{\sqrt{\langle u'u' \rangle}}{u_\tau},$$

$$v_{\text{rms}}^+ = \frac{\sqrt{\langle v'v' \rangle}}{u_\tau}, \quad (17)$$

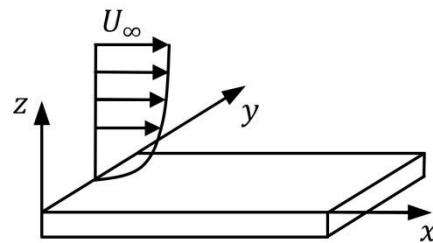
$$w_{\text{rms}}^+ = \frac{\sqrt{\langle w'w' \rangle}}{u_\tau}$$

که در آن $\langle u'u' \rangle$ ، $\langle v'v' \rangle$ و $\langle w'w' \rangle$ به ترتیب تنش‌های رینولدز و u' ، v' و w' به ترتیب سرعت‌های نوسانی در جهات x ، y و z هستند. همچنین تنش برشی رینولدز به شکل زیر بی‌بعد می‌شود:

$$\langle u'w' \rangle^+ = \frac{\langle u'w' \rangle}{(u_\tau)^2} \quad (18)$$

برای گسسته‌سازی معادلات ناویر - استوکس فیلترشده، از یک شبکه محاسباتی سازمان‌یافته کارترین استفاده شده که در جهات x و y یکنواخت است. در جهت عمود بر دیوار z ، برای حصول دقت بیشتر، در نزدیکی دیوار شبکه فشرده شده است. تعداد نقاط گرهی که برای گسسته‌سازی استفاده شده در سه جهت عبارت است از N_x ، N_y و N_z . برای همه شبیه‌سازی‌های ارائه شده در این مقاله، اندازه دامنه حل مسئله برابر با $(20, 4, 4) = (L_x/\delta, L_y/\delta, L_z/\delta)$ است. این دامنه به میزان قابل توجهی بزرگ‌تر از دامنه مورد استفاده در [9] یعنی $(15, 56/2, 2) = (L_x/\delta, L_y/\delta, L_z/\delta)$ برای انجام DNS است. جدول ۱ تعداد نقاط گرهی و اندازه سلول محاسباتی در مختصات داخلی را برای اعداد رینولدز مختلف نشان می‌دهد.

در جهت اصلی جریان x ، در مرز ورودی از یک نمایه سرعت نوسانی مطابق روش [۸ و ۹] استفاده شده است. نوسان‌های سرعت در مکانی در پایین دست با فاصله $x_f/\delta = 10$ از ورودی استخراج شده‌اند. بررسی‌های [۹] نشان داده



شکل ۲. هندسه لایه مرزی، نمایه سرعت ورودی و تعریف دستگاه مختصات مسئله

ضخامت لایه مرزی δ را عموماً به عنوان ضخامتی که در آن سرعت متوسط $\langle u \rangle$ به ۹۹٪ سرعت جریان خارجی U_∞ می‌رسد، تعریف می‌کنند. از آنجا که این ضخامت از محاسبه یک اختلاف سرعت ناچیز به دست می‌آید، دقت بالایی ندارد. بنابراین از تعریف‌های انتگرالی برای محاسبه دقیق‌تر ضخامت استفاده می‌شود. دو مورد از چنین تعریف‌هایی، ضخامت جابجایی δ^* و ضخامت اندازه حرکت θ هستند که به ترتیب با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\langle u \rangle}{U_\infty}\right) dz \quad (12)$$

$$\theta = \int_0^\infty \frac{\langle u \rangle}{U_\infty} \left(1 - \frac{\langle u \rangle}{U_\infty}\right) dz \quad (13)$$

بر اساس این ضخامت‌ها می‌توان اعداد رینولدز مختلفی تعریف نمود:

$$\text{Re}_\delta = \frac{U_\infty \delta}{\nu}, \text{Re}_{\delta^*} = \frac{U_\infty \delta^*}{\nu}, \text{Re}_\theta = \frac{U_\infty \theta}{\nu} \quad (14)$$

نمایه سرعت یک لایه مرزی آشفته به دلیل قوی‌تر بودن مکانیزم نفوذ در جریان آشفته، تخت‌تر از نمایه سرعت یک لایه مرزی آرام است. ضریب شکل $H = \delta^*/\theta$ به طور کمی نشان‌دهنده میزان این تخت بودن نمایه سرعت متوسط است.

بی‌بعد کردن کمیت‌ها با مقیاس داخلی و ن در دست در گزارش نتایج آماری جریان‌های آشفته در نزدیکی دیوار مرسوم بوده و نیز امکان بررسی کیفیت نتایج را بهتر فراهم می‌کند. برای انجام این بی‌بعدسازی، نیاز به تعریف سرعت برشی به عنوان تابعی از تنش برشی دیوار است:

$$u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}, \quad \tau_w = \mu \left. \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (15)$$

جهت شتاب دادن به همگرایی حل تکراری، از تکنیک چند شبکه^۱ استفاده شده است. متغیرهای جریان در یک شبکه محاسباتی جابه‌جا شده ذخیره شده‌اند. یعنی فشار در مرکز سلول و سرعت‌ها بر روی وجوه سلول ذخیره شده‌اند. گسسته‌سازی مدل زیر شبکه نیز با یک روش تفاضل متناهی مرتبه دوم صورت گرفته است. میدان لزجت گردابه که برای محاسبه تنش‌های زیر شبکه لازم است، در نقاط گرهی فشار (مرکز سلول محاسباتی) ذخیره شده است.

این کد شرط پایستگی نرژم انرژی جنبشی در حالت حدی جریان غیر لزج را ارضا می‌کند. این شرط در کنار شرط CFL پایداری عددی شبیه‌سازی را در انتگرال‌گیری طولانی مدت جریان آشفتنه تضمین می‌کند. همچنین این شرط موجب می‌شود که تمامی استهلاك انرژی جنبشی آشفتنه توسط مدل زیر شبکه صورت گیرد و در نتیجه، از آنجا که خطای عددی از جنس استهلاكی نیست، عدم دخالت روش گسسته‌سازی عددی در میزان استهلاك انرژی مدل زیر شبکه را تضمین می‌کند. این شرط در LES بسیار مهم است. زیرا با ارضای آن، آبشار انرژی آشفتگی در جایی قطع می‌شود که فیلتر ایجاب می‌کند. چنانچه این شرط برقرار نباشد، آبشار انرژی در اعداد موج کوچک‌تر از آن قطع شده و در نتیجه مودهای فوریر نزدیک به عدد موج قطع شدن با دقت پایینی حل می‌شوند. از آنجا که این مقیاس‌ها در محاسبه تنش زیر شبکه نقش اساسی دارند، عدم دقت در آن‌ها به عدم دقت در محاسبه تنش زیر شبکه و در نتیجه کاهش کیفیت LES منجر می‌شود.

حلگر جریان فوق به کمک روش تجزیه میدان و با استفاده از کتابخانه MPI برای پردازش موازی آماده شده است. در مرز هر زیر دامنه، شرایط مرزی با استفاده از سلول‌های گاوست تبادل می‌شوند.

۶. نتایج و اعتبارسنجی شبیه‌سازی

در این قسمت، نتایج شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ جریان لایه مرزی آشفتنه بر روی صفحه تخت بدون گرادیان فشار در چهار عدد رینولدز مختلف از $Re_\theta = 303$ تا $Re_\theta = 6930$

است که بهترین مکان برای استخراج نوسان‌های سرعت در فاصله‌ای بین $x_f/\delta = 8$ و $x_f/\delta = 12$ در پایین دست ورودی است. چنانچه فاصله کمتر از $x_f/\delta = 8$ باشد، هنوز همبستگی میان نوسان‌های سرعت به اندازه کافی کوچک نشده و نوسان‌ها در مکان استخراج از نظر آماری با نوسان‌ها در ورودی همبسته هستند. بنابراین برهم‌نهی آن‌ها مودهای فوریر خاصی را بر جریان اجبار می‌کند که در جریان طبیعی مشاهده نمی‌شوند. چنانچه فاصله بیشتر از $x_f/\delta = 12$ باشد، بر اثر رشد طبیعی ضخامت لایه مرزی، سرعت‌های نوسانی قابل برهم‌نهی بر نمایه سرعت ورودی نبوده و مقیاس‌دهی آن‌ها نیز خطای قابل توجهی ایجاد می‌کند. در مرز خروجی از شرط گرادیان سرعت برابر با صفر استفاده شده که معادل با یک شرط مرزی دیریشله برای فشار می‌باشد. در جهت عرضی و همگن y ، شرط مرزی پرئودیک اعمال شده است. در جهت عمود بر دیوار z ، بر روی دیوار شرط عدم لغزش و بر روی مرز روبروی آن نیز یک شرط دیریشله برای فشار اعمال شده است که یک لایه مرزی بدون گرادیان فشار ایجاد می‌کند.

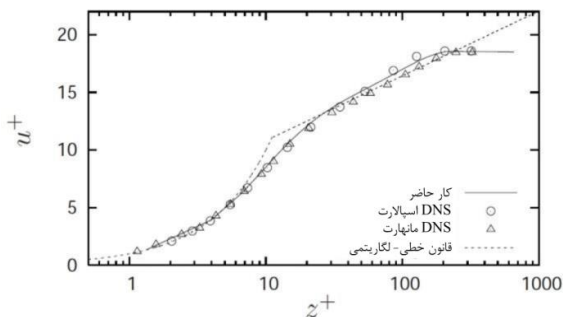
جدول ۱. تعداد نقاط گرهی و اندازه شبکه برای اعداد رینولدز مختلف

Δz_{\min}^+	Δy^+	Δx^+	N_z	N_y	N_x	Re_θ
۱/۳۳	۴/۱۵	۸/۲۹	۱۰۰	۸۰	۲۰۰	۳۰۳
۱/۸۰	۵/۴۵	۱۰/۸۴	۱۱۰	۱۳۲	۳۳۲	۶۷۸
۳/۰۰	۱۰/۴۲	۱۴/۶۵	۱۲۸	۱۴۴	۵۱۲	۱۴۰۸
۴/۶۲	۲۰/۵۳	۳۸/۵۰	۱۲۸	۳۰۰	۸۰۰	۶۹۳۰

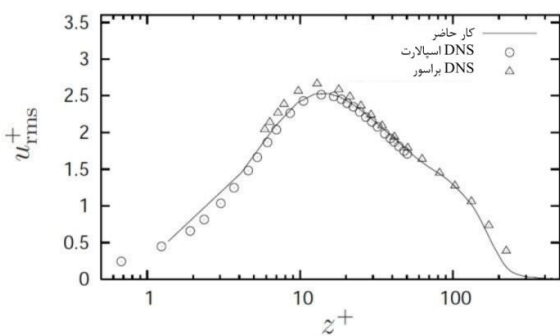
۵. روش‌های عددی

برای حل معادلات ناویر - استوکس تراکم ناپذیر فیلترشده (۳) و (۴)، یک کد دینامیک سیالات محاسباتی به کار رفته است. این کد که به زبان فترن نوشته شده از یک روش گسسته‌سازی حجم محدود مرتبه دوم در فضا و یک روش انتگرال‌گیری زمانی رونگه - کوتا مرتبه سوم با حافظه کم [۱۸] به همراه تکنیک کورین [۱۹] و تمام [۲۰] بهره می‌برد. معادله پواسون برای فشار در هر گام زمانی و در هر زیر گام رونگه - کوتا به‌طور تکراری با روش SIP [۲۱] حل می‌شود.

در شکل‌های ۵ و ۶ نمایش داده شده‌اند. تنش برشی رینولدز یعنی $\langle u'w' \rangle^+$ نیز در شکل ۷ نشان داده شده است. تطابق خوبی میان نتایج با داده‌های DNS مشاهده می‌شود. کمی اختلاف با DNS براسور را می‌توان به اختلاف در اعداد رینولدز نسبت داد. به‌طور خاص، تطابق خوب تنش برشی رینولدز با نتایج مرجع، نشانه شبیه‌سازی دقیق ساختمان‌های گردابه‌ای در نزدیکی دیوار به‌ویژه رویدادهای جاروب^۲ و بیرون‌رانی^۳ است. چراکه این رویدادها بیشترین نقش را در ایجاد تنش‌های رینولدز دارند. تنش برشی رینولدز همچنین نقش مهمی در تولید انرژی آشفتگی در نزدیکی دیوار دارد و با درست پیش‌بینی شدن آن، تولید آشفتگی به‌درستی پیش‌بینی می‌شود.



شکل ۳. نمایه سرعت متوسط در مختصات داخلی به‌عنوان تابع فاصله از دیوار در $Re_\theta = 303$



شکل ۴. نمایه u_{rms}^+ در مختصات داخلی به‌عنوان تابع فاصله از دیوار در $Re_\theta = 303$

با استفاده از مدل زیرشبکه WALE ارائه و با نتایج تجربی و DNS موجود مقایسه می‌شود.

۱-۶. جریان در $Re_\theta = 303$

این عدد رینولدز به این دلیل انتخاب شده که بتوان نتایج را با شبیه‌سازی مستقیم عددی اسپالارت [۱۷] (انجام شده با یک کد طیفی)، مانهارت [۹] (انجام شده با یک کد حجم محدود) و براسور [۲۲] (انجام شده با یک کد طیفی) مقایسه نمود. عدد رینولدز برشی در این حالت $Re_\tau = 160$ است که در آن

$$Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu} \quad (19)$$

جدول ۲ ضریب اصطکاک سطحی C_f (تنش برشی دیوار بی‌بعد شده) و ضریب شکل H حاصل از LES موجود را با دیگر نتایج مقایسه می‌کند. هماهنگی نتایج دقت بالای LES موجود را نشان می‌دهد.

جدول ۲. پارامترهای لایه مرزی به‌دست آمده و مقایسه آن با نتایج موجود در $Re_\theta = 303$

شبیه‌سازی	Re_θ	$C_f \times 10^3$	H
LES انجام شده	303	5/85	1/59
DNS اسپالارت [17]	300	5/77	1/66
DNS براسور [22]	377	5/59	1/55

نمایه سرعت متوسط (u) به‌عنوان تابعی از z در مختصات درونی دیوار (مختصات w_n در یست) در مقیاس لگاریتمی در شکل ۳ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تطابق نتایج با داده‌های DNS بسیار خوب است. در ضمن، در شکل ۳ منظور از قانون خطی و لگاریتمی به ترتیب $u^+ = z^+ \left(\frac{1}{\kappa} \right) \ln z^+ + C^+$ است که نمایه سرعت را در محدوده‌های زیر لایه لزج و لگاریتمی مدل می‌کنند. در مدل لگاریتمی، ثوابت $\kappa \approx 41/0$ و $C^+ \approx 5/5$ هستند. برای ارزیابی کیفیت شبیه‌سازی، تنها مقایسه نمایه سرعت کافی نیست. لازم است تا در کنار نمایه سرعت، تنش‌های رینولدز و یا معادل آن‌ها مقادیر rms نوسان‌های سرعت بررسی شوند. شکل ۴، نمایه‌های rms نوسان سرعت در جهت x یعنی u_{rms}^+ را نشان می‌دهد. همچنین نمایه‌های v_{rms}^+ و w_{rms}^+ به ترتیب

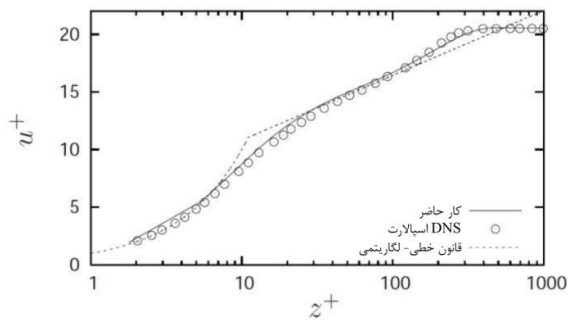
و ضریب شکل H حاصل از LES موجود را با دیگر نتایج مقایسه می‌کند. هماهنگی نتایج دقت بالای LES موجود را نشان می‌دهد.

جدول ۳. پارامترهای لایه مرزی به‌دست آمده و مقایسه آن با نتایج موجود

در $Re_\theta = 678$

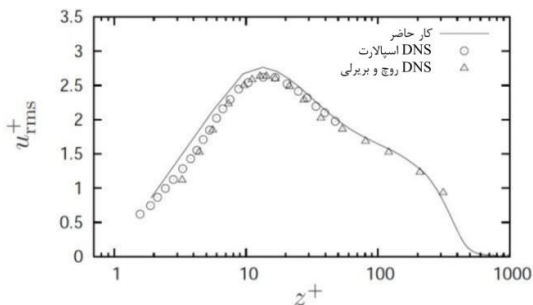
شبه‌سازی	Re_θ	$C_f \times 10^3$	H
LES انجام شده	۶۷۸	۴/۹۲	۱/۴۶
DNS اسپالارت [۱۷]	۶۷۰	۴/۸۰	۱/۴۹

شکل ۸ نمایه سرعت متوسط را در مختصات داخلی به‌عنوان تابعی از فاصله از دیوار در مقیاس لگاریتمی نشان می‌دهد. نمایه‌های u_{rms}^+ ، w_{rms}^+ و تنش برشی رینولدز به‌عنوان تابعی از فاصله از دیوار به ترتیب در شکل‌های ۹ تا ۱۲ نمایش داده شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تطابق بسیار خوبی بین نتایج DNS مرجع و LES حاضر وجود دارد. کار حاضر، u_{rms}^+ را در نزدیکی دیوار کمی بیش از مقدار DNS مرجع پیش‌بینی می‌کند (به شکل ۹ رجوع شود). همچنین، تنش برشی رینولدز در ناحیه دور از دیوار، همان‌طور که در شکل ۱۲ نشان داده شده است، کمی کمتر از مقدار DNS مرجع پیش‌بینی می‌شود.



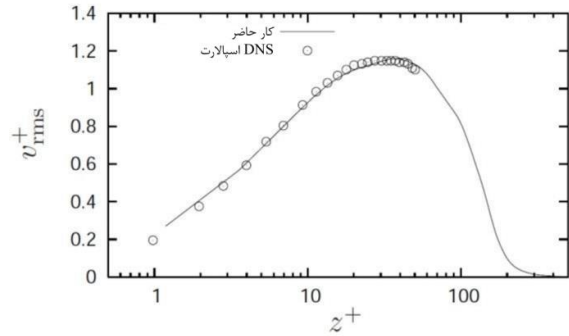
شکل ۸. نمایه سرعت متوسط در مختصات داخلی به‌عنوان تابع فاصله از

دیوار در $Re_\theta = 678$



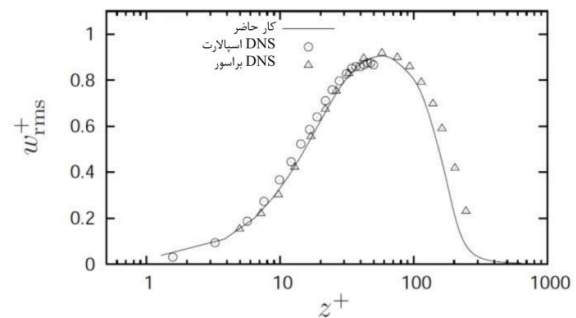
شکل ۹. نمایه u_{rms}^+ در مختصات داخلی به‌عنوان تابع فاصله از دیوار در

$Re_\theta = 678$



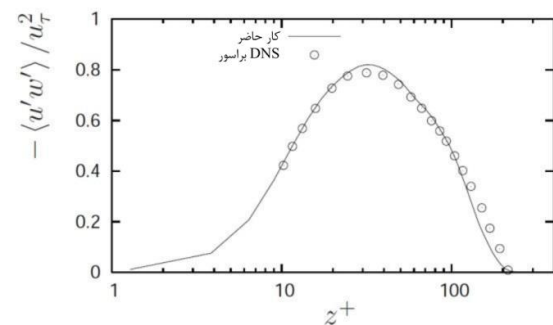
شکل ۵. نمایه v_{rms}^+ در مختصات داخلی به‌عنوان تابع فاصله از دیوار در

$Re_\theta = 303$



شکل ۶. نمایه w_{rms}^+ در مختصات داخلی به‌عنوان تابع فاصله از دیوار در

$Re_\theta = 303$



شکل ۷. تنش برشی رینولدز در مختصات داخلی به‌عنوان تابع فاصله از

دیوار در $Re_\theta = 303$

درضمن دلیل عدم مقایسه تنش برشی با داده‌های اسپالارت در شکل ۷، عدم گزارش این کمیت در مقاله ایشان است.

۲-۶ جریان در $Re_\theta = 678$

در این قسمت نیز مشابه قسمت قبل، نتایج شبه‌سازی برای حالت $Re_\theta = 678$ گزارش و با نتایج موجود از DNS های اسپالارت [۱۷]، براسور [۲۲] و ویرلی [۲۳] مقایسه شده‌اند.

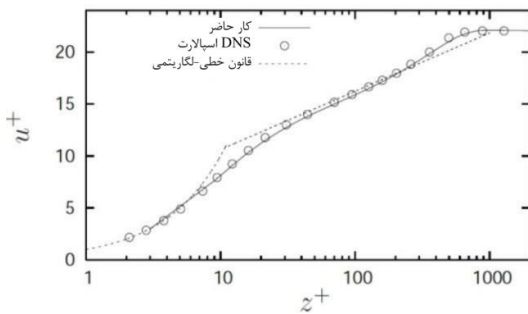
عدد رینولدز برشی در این حالت $Re_\tau = 352$ است. جدول ۳ ضریب اصطکاک سطحی C_f (تنش برشی دیوار بی‌بعد شده)

جدول ۴. پارامترهای لایه مرزی به دست آمده و مقایسه آن با نتایج موجود

در $Re_\theta = 1408$

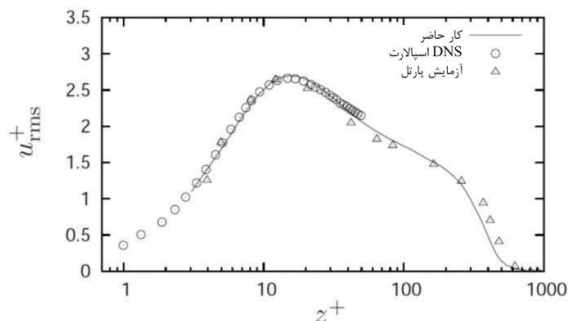
شبیه سازی	Re_θ	$C_f \times 10^3$	H
LES انجام شده	۱۴۰۸	۴/۳۱	۱/۴۰
DNS اسپالارت [۱۷]	۱۴۱۰	۴/۲۰	۱/۴۲

شکل ۱۳ نمایه سرعت متوسط را در مختصات داخلی به عنوان تابعی از فاصله از دیوار در مقیاس لگاریتمی نشان می‌دهد. نمایه‌های u_{rms}^+ ، v_{rms}^+ و w_{rms}^+ و تنش برشی رینولدز به عنوان تابعی از فاصله از دیوار به ترتیب در شکل‌های ۱۴ تا ۱۷ نمایش داده شده‌اند. به دلیل عدم گزارش تنش برشی رینولدز در مقاله اسپالارت، نتایج با آزمایش اِرم [۲۵] در یک عدد رینولدز نزدیک ($Re_\theta = 1567$) مقایسه شده‌اند. در کار اِرم، نتایج در نزدیکی دیوار گزارش نشده‌اند. اما به دوراز دیوار، نتایج LES موجود با نتایج اِرم همخوانی بسیار خوبی را نشان می‌دهند.



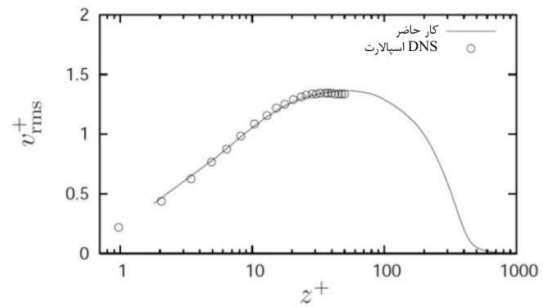
شکل ۱۳. نمایه سرعت متوسط در مختصات داخلی به عنوان تابعی از فاصله از

دیوار در $Re_\theta = 1408$



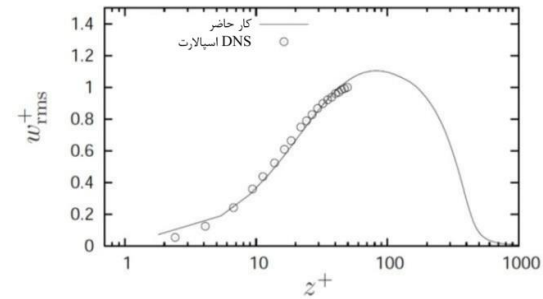
شکل ۱۴. نمایه u_{rms}^+ در مختصات داخلی به عنوان تابعی از فاصله از دیوار در

$Re_\theta = 1408$



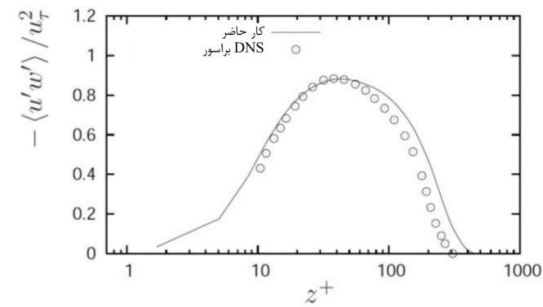
شکل ۱۰. نمایه v_{rms}^+ در مختصات داخلی به عنوان تابعی از فاصله از دیوار در

$Re_\theta = 678$



شکل ۱۱. نمایه w_{rms}^+ در مختصات داخلی به عنوان تابعی از دیوار در

$Re_\theta = 678$



شکل ۱۲. نمایه تنش برشی رینولدز در مختصات داخلی به عنوان تابعی

فاصله از دیوار در $Re_\theta = 678$

۳-۶. جریان در $Re_\theta = 1408$

نتایج LES برای عدد رینولدز نسبتاً بالای $Re_\theta = 1408$ گزارش و با نتایج موجود از DNS اسپالارت [۱۷] و آزمایش‌های تجربی پارتل [۲۴] و اِرم [۲۵] مقایسه شده‌اند. عدد رینولدز برشی در این حالت $Re_\tau = 715$ است. جدول ۴ ضریب اصطکاک سطحی C_f (تنش برشی دیوار بی‌بعد شده) و ضریب شکل H حاصل از LES موجود را با دیگر نتایج مقایسه می‌کند. هماهنگی نتایج دقت بالای LES موجود را نشان می‌دهد.

شده) و ضریب شکل H حاصل از LES موجود را با دیگر نتایج مقایسه می‌کند. هماهنگی نتایج دقت بالای LES موجود را نشان می‌دهد.

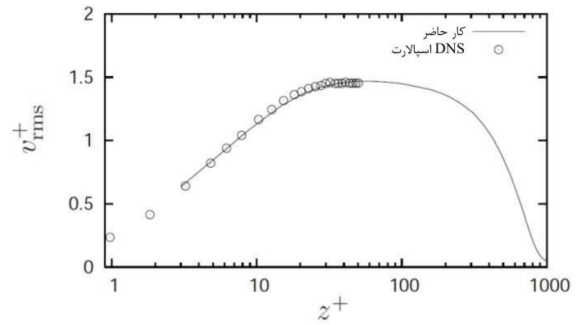
جدول ۵. پارامترهای لایه مرزی به دست آمده و مقایسه آن با نتایج موجود

در $Re_\theta = 6930$

H	$C_f \times 10^3$	Re_θ	شبیه‌سازی
۱/۳۳	۲/۷۲	۶۹۳۰	LES انجام شده
۱/۳۳	۲/۶۵	۷۱۳۹	آزمایش برانز و همکاران [۲۶]

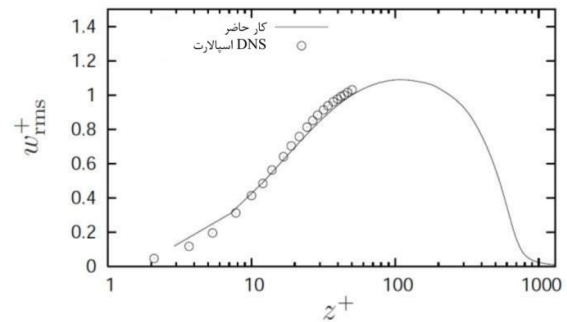
شکل ۱۸ نمایه سرعت متوسط را در مختصات داخلی به عنوان تابعی از فاصله از دیوار در مقیاس لگاریتمی نشان می‌دهد. نمایه‌های u_{rms}^+ ، v_{rms}^+ و w_{rms}^+ و تنش برشی رینولدز به عنوان تابعی از فاصله از دیوار به ترتیب در شکل‌های ۱۹ تا ۲۲ نمایش داده شده‌اند. علی‌رغم عدد رینولدز بالای مسئله، تطابق خوبی با نتایج تجربی مشاهده می‌شود که نشان‌دهنده قدرت تکنیک LES در شبیه‌سازی جریان‌های آشفته و نیز سودمند بودن شرط مرزی ورودی مورد استفاده است.

عدم تطابقی که در محدوده نزدیک به دیوار یعنی در محدوده بین ۱۰ تا ۱۰۰ مشاهده می‌شود، لزوماً به معنای کیفیت پایین نتایج شبیه‌سازی نیست، بلکه ممکن است ناشی از دقت پایین اندازه‌گیری در داده‌های تجربی باشد. زیرا در این عدد رینولدز بالا، ناحیه مورد اشاره بسیار به دیوار نزدیک است و دقت اندازه‌گیری‌های تجربی در فواصل بسیار نزدیک به دیوار معمولاً پایین‌تر است. زیرا در هر سه نمایه نشان داده شده در شکل‌های ۱۹ تا ۲۱، مقدار rms نوسان‌های سرعت به دست آمده از LES در نزدیکی دیوار به سمت صفر میل می‌کنند که رفتار درست از نظر فیزیکی است. زیرا در زیر لایه لزج جریان اصولاً آرام است. این در حالی است که نتایج آزمایشی به‌جز در شکل ۱۹، این رفتار را به درستی توصیف نمی‌کنند. مقدار ماکزیمم w_{rms}^+ کمی از مقدار ماکزیمم v_{rms}^+ کمتر شده است که یک اثر شناخته شده در جریان آشفته لایه مرزی و نیز کانال است [۹ و ۱۷].



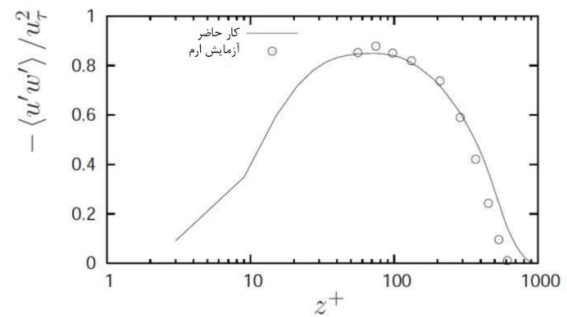
شکل ۱۵. نمایه مختصات داخلی به عنوان تابع فاصله از دیوار در

$Re_\theta = 1408$



شکل ۱۶. نمایه مختصات داخلی به عنوان تابع فاصله از دیوار در

$Re_\theta = 1408$



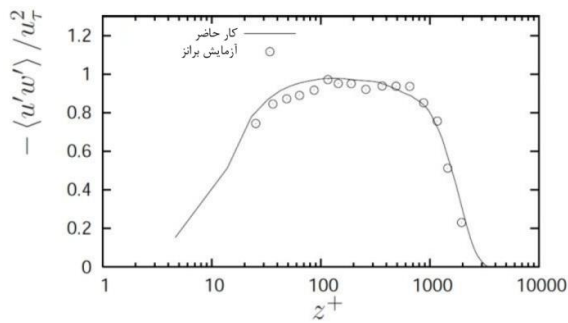
شکل ۱۷: نمایه تنش برشی رینولدز در مختصات داخلی به عنوان تابع

فاصله از دیوار در $Re_\theta = 1408$

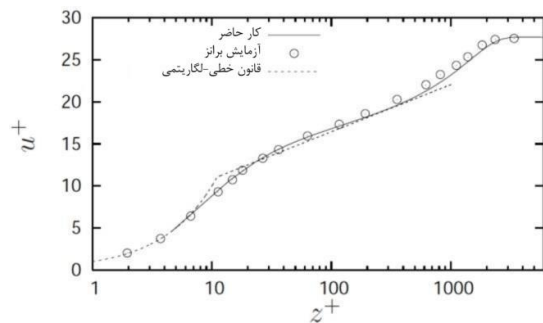
۴-۶. جریان در $Re_\theta = 6930$

نتایج LES برای عدد رینولدز نسبتاً بالای $Re_\theta = 6930$ گزارش و با نتایج تجربی موجود از آزمایش‌های برانز و همکاران [۲۶] در $Re_\theta = 7139$ که در دانشگاه فنی برلین انجام شده، مقایسه شده‌اند. این عدد رینولدز برای انجام DNS بالا بوده و حجم محاسبات بسیار بالای مورد نیاز، انجام DNS با سوپر کامپیوترهای امروزی را یک چالش محاسباتی می‌سازد.

عدد رینولدز برشی در این حالت $Re_\tau = 3050$ است. جدول ۵ ضریب اصطکاک سطحی C_f (تنش برشی دیوار بی‌بعد



شکل ۲۲. نمایه تنش برشی رینولدز در مختصات داخلی به‌عنوان تابع فاصله از دیوار در $Re_\theta = 6930$

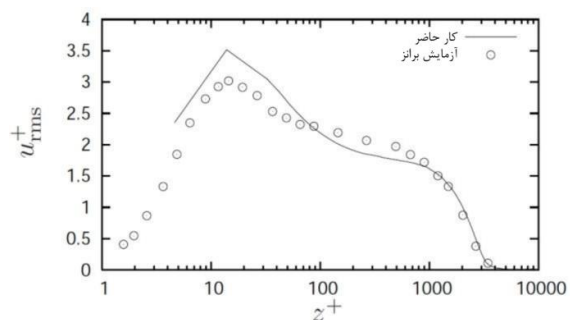


شکل ۱۸. نمایه سرعت متوسط در مختصات داخلی به‌عنوان تابع فاصله از دیوار در $Re_\theta = 6930$

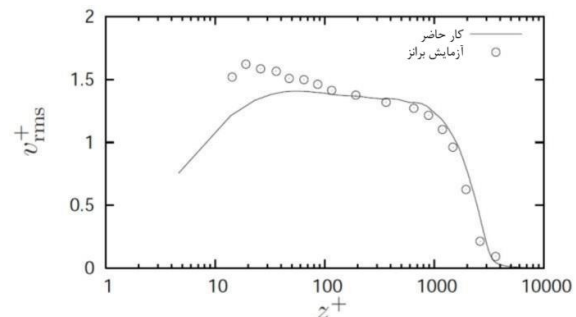
۴-۵. تکامل نمایه سرعت متوسط با عدد رینولدز

در این قسمت، تکامل شکل نمایه سرعت متوسط در لایه مرزی با تغییر عدد رینولدز بررسی می‌شود. برای این منظور، از ضریب شکل H نمایه سرعت استفاده می‌شود. شکل ۲۳ ضریب شکل را برحسب عدد رینولدز نشان می‌دهد. نتایج DNS اسپالارت [۱۷] و LES هیکل و آدامز [۲۷] نیز برای مقایسه نشان داده شده‌اند. به‌طور کلی می‌توان گفت که مقدار H با افزایش عدد رینولدز کاهش می‌یابد. یعنی در عدد رینولدز $Re_\theta = 303$ ، ضریب شکل مقداری حدود $1/6$ داشته و با افزایش عدد رینولدز کاهش می‌یابد تا در عدد رینولدز نسبتاً بالای $Re_\theta = 6930$ به مقدار $1/3$ که توسط کلبانوف برای اعداد رینولدز بزرگ پیش‌بینی شده نزدیک می‌شود [۲۳]. توجه شود که مقدار H برای نمایه سرعت جریان لایه مرزی آرام از حل بلازیوس مقداری حدود $2/6$ دارد.

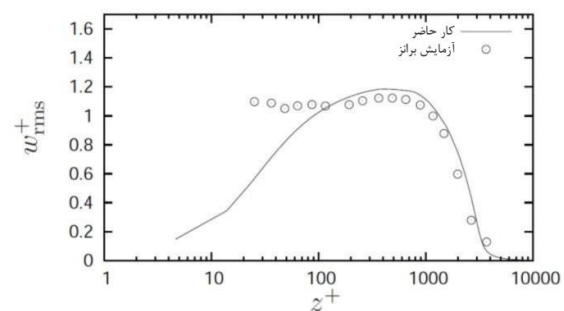
نتایج مقاله حاضر همخوانی خوبی با نتایج دیگر دارد. بیشترین ناهمخوانی مربوط به عدد رینولدز پایین $Re_\theta = 303$ است. دلیل این ناهمخوانی می‌تواند این باشد که در این عدد رینولدز پایین، به‌سختی می‌توان نمایه‌های سرعت آشفته‌ای را به دست آورد که از گذار طبیعی به آشفتگی بر روی صفحه تخت ایجاد شده باشند. لازم به یادآوری است که تئوری پایداری خطی، عدد رینولدز گذار برای لایه مرزی بر روی صفحه تخت را $Re_{\delta^*} = 520$ پیش‌بینی می‌کند که این مقدار از حل معادله اور-زومرفلد با نمایه سرعت بلازیوس به دست می‌آید. درحالی‌که $Re_\theta = 303$ معادل با $Re_{\delta^*} = 500$ می‌باشد. به عبارتی جریان آشفته کاملاً توسعه یافته نمی‌تواند در اعداد رینولدز کمتر از $Re_{\delta^*} = 600$ وجود داشته باشد.



شکل ۱۹. نمایه u_{rms}^+ در مختصات داخلی به‌عنوان تابع فاصله از دیوار در $Re_\theta = 6930$



شکل ۲۰. نمایه v_{rms}^+ در مختصات داخلی به‌عنوان تابع فاصله از دیوار در $Re_\theta = 6930$



شکل ۲۱. نمایه w_{rms}^+ در مختصات داخلی به‌عنوان تابع فاصله از دیوار در $Re_\theta = 6930$

تانسورهای R_{ij} ، P_{ij} ، T_{kij} و ϵ_{ij} به ترتیب شار تنش رینولدز، عبارت تولید، همبستگی فشار - نرخ کرنش و عبارت استهلاک هستند که با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$T_{ijk} = \langle u'_i u'_j u'_k \rangle - \nu \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \langle u'_i p' \rangle \delta_{jk} + \frac{1}{\rho} \langle u'_j p' \rangle \delta_{ik} \quad (22)$$

$$P_{ij} = -\langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} - \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} \quad (23)$$

$$R_{ij} = \frac{1}{\rho} \langle p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \rangle = \frac{1}{\rho} \langle p' s'_{ij} \rangle \quad (24)$$

$$\epsilon_{ij} = 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right\rangle \quad (25)$$

در معادله (۲۴)، s'_{ij} دو برابر تانسور نرخ کرنش نوسانی است:

$$s'_{ij} = \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}, s'_{ii} = \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (26)$$

که جمع عناصر روی قطر اصلی آن به دلیل معادله پیوستگی برای سرعت نوسانی در جریان تراکم ناپذیر صفر بوده و در نتیجه رابطه $R_{ii} = 0$ برقرار است.

انرژی جنبشی آشفتگی TKE از جمع عناصر روی قطر اصلی تانسور تنش رینولدز $\langle u'_i u'_j \rangle$ یعنی $\langle u'_i u'_i \rangle$ به دست می‌آید:

$$TKE = \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle \quad (27)$$

با قرار دادن $i = j$ در معادله (۲۰) و در نظر گرفتن اینکه $R_{ii} = 0$ است، معادله ترابری انرژی جنبشی آشفتگی به دست می‌آید:

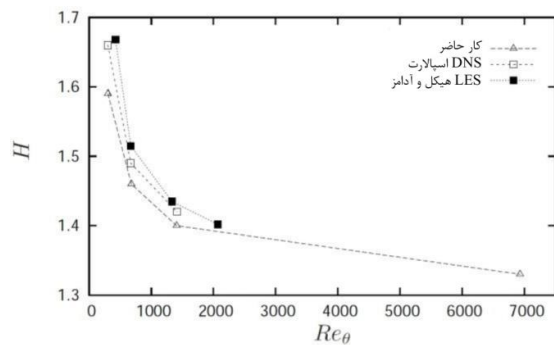
$$\frac{\overline{D} \langle u'_i u'_i \rangle}{\overline{D} t} + \frac{\partial T_{kii}}{\partial x_k} = P_{ii} + \epsilon_{ii} \quad (28)$$

توجه شود که

$$\frac{\overline{D} \langle u'_i u'_i \rangle}{\overline{D} t} = 2 \frac{\overline{D} TKE}{\overline{D} t} \quad (29)$$

تانسور همبستگی فشار و نرخ کرنش یعنی R_{ij} در معادله ترابری تنش رینولدز (۲۰) وجود دارد، ولی در معادله ترابری انرژی جنبشی آشفتگی حذف می‌شود. پس این عبارت نقشی در تولید و یا استهلاک انرژی جنبشی نداشته و تنها سبب

بنابراین در عدد رینولدز $Re_\theta = 303$ در واقع جریان در زیر عدد رینولدز بحرانی وجود دارد. در چنین حالتی، چنانچه اغتشاشاتی در جریان ایجاد شوند، منجر به یک جریان آشفتگی شیب به جریان توسعه یافته می‌شود. بنابراین، در حالت $Re_\theta = 303$ ، خواص جریان شیب‌سازی شده تابع استراتژی شیب‌سازی خواهد بود. زیرا نوع جریان آشفتگی ایجاد شده می‌تواند متفاوت باشد. در شیب‌سازی مستقیم عددی اسپالارت، از یک شرط مرزی پرریودیک در جهت اصلی جریان استفاده شده است. بدین معنی که سرعت خروجی مقیاس‌بندی شده و سپس به‌عنوان سرعت ورودی معرفی می‌شود. در شیب‌سازی گردابه بزرگ هیکل و آدامز [۲۷] از یک روش تکامل زمانی بهره برده شده است. یعنی در یک دامنه محدود، شیب‌سازی را از لایه مرزی آرام بلازیوس آغاز و نواحی گذار و سپس جریان کاملاً توسعه یافته را مشاهده کرده‌اند. درحالی‌که در مقاله حاضر، نوسان‌های سرعت از نقطه‌ای در پایین دست استخراج و به ورودی معرفی شده‌اند.



شکل ۲۳. تکامل ضرب H به‌عنوان تابع عدد رینولدز

۶-۶. فرایند توزیع مجدد انرژی جنبشی

در این قسمت فرایند توزیع مجدد انرژی جنبشی بررسی می‌شود. از معادله پیوستگی (۱) و معادله ناویر - استوکس (۲) می‌توان معادله زیر را برای تانسور تنش رینولدز استخراج کرد [۲۸]:

$$\frac{\overline{D} \langle u'_i u'_j \rangle}{\overline{D} t} + \frac{\partial T_{kij}}{\partial x_k} = P_{ij} + R_{ij} + \epsilon_{ij} \quad (20)$$

که در آن

$$\frac{\overline{D}}{\overline{D} t} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (21)$$

می‌شود. یعنی دو مؤلفه R_{pp} و R_{pp} انرژی جنبشی که توسط R_{11} از u_{rms} گرفته می‌شود را به ترتیب به w_{rms} و v_{rms} می‌دهند. کمیت‌های مشابه برای اعداد رینولدز دیگر در شکل‌های ۲۵ تا ۲۷ رسم شده‌اند. به‌طور کیفی رفتار مشابهی در همه اعداد رینولدز مشاهده می‌شود. با بزرگ‌تر شدن عدد رینولدز، مقادیر ماکزیمم و مینیمم کمیت‌ها افزایش می‌یابد که نشان‌دهنده تقویت فرایند توزیع مجدد انرژی جنبشی با افزایش عدد رینولدز است. همچنین مشاهده می‌شود که LES در مقایسه با DNS مقادیر قدر مطلق ماکزیمم و مینیمم را کمتر پیش‌بینی می‌کند.

۷. نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، نتایج شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ جریان آشفته در لایه مرزی روی صفحه تخت بدون گرادیان فشار در چهار عدد رینولدز از $Re_{\theta} = 303$ تا $Re_{\theta} = 6930$ گزارش شده است. تئوری و معادلات حاکم LES مرور شده‌اند. مدل زیر شبکه WALE که در این تحقیق به‌کاررفته، تشریح شده است. روش‌های عددی مورد استفاده به اختصار معرفی شده‌اند. پس از آن شبیه‌سازی‌ها در چهار عدد رینولدز مختلف انجام و نتایج آن با نتایج موجود DNS و تجربی مقایسه شده‌اند. تطابق خوبی میان نتایج به‌دست‌آمده با نتایج مرجع مشاهده شد که نشانه مفید بودن مدل زیر شبکه WALE به همراه تکنیک تولید نمایه سرعت ورودی نوسانی برای شبیه‌سازی به‌ویژه در اعداد رینولدز بزرگ است. در عدد رینولدز نسبتاً پایین $Re_{\theta} = 303$ ، تطابق خیلی خوبی با نتایج مرجع مشاهده نشد که دلیل آن می‌تواند این باشد که در این عدد رینولدز، جریان زیر بحرانی بوده و کاملاً توسعه یافته نیست. همچنین فرایند توزیع مجدد انرژی جنبشی آشفته با استفاده از تانسور همبستگی بین نوسان‌های فشار و کرنش مطالعه شده است.

انتقال انرژی جنبشی از یک مؤلفه تنش نرمال رینولدز به مؤلفه دیگر می‌شود.

در جریان آشفته توسعه‌یافته در لایه مرزی روی صفحه تخت، با توجه به تقارن‌ها و همگن بودن آماری مسئله در جهت عرضی y ، عبارت تولید انرژی آشفتگی مربوط به هر یک از تنش‌های نرمال رینولدز از معادله کلی (۲۳) به شکل زیر خواهند بود:

$$P_{11} = -\langle u'u' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \langle u'w' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \quad (30)$$

$$P_{22} = 0 \quad (31)$$

$$P_{33} = -\langle u'w' \rangle \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial x} - \langle w'w' \rangle \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial z} \quad (32)$$

طبق معادله (۳۱)، عبارت تولید مربوط به $\langle v'v' \rangle$ صفر است. از طرفی با توجه به کوچک بودن $\langle w \rangle$ در جریان لایه مرزی، عبارت تولید مربوط به $\langle w'w' \rangle$ ، هرچند صفر نیست، اما در مقایسه با عبارت تولید مربوط به $\langle u'u' \rangle$ به‌طور قابل‌توجهی کوچک‌تر است. بنابراین، اگر هیچ فرایند توزیع مجدد انرژی جنبشی در لایه مرزی موجود نباشد، انتظار می‌رود که مقدار v_{rms} صفر و مقدار w_{rms} در مقایسه با u_{rms} ناچیز باشد. این در حالی است که اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی و نتایج DNS و LES حاضر نشان می‌دهند که این دو مؤلفه غیر صفر و قابل توجه هستند.

مکانیزم توزیع مجدد انرژی (همبستگی فشار - نرخ کرنش) که در بالا توضیح داده شد، مسئول این پدیده است. معادله (۲۴) نشان می‌دهد که نوسان فشار p' یکی از عوامل تشکیل‌دهنده تانسور همبستگی فشار - نرخ کرنش است. در واقع نوسان فشار محملی است که جریان آشفته از طریق آن فرایند توزیع مجدد انرژی را ایجاد می‌کند [۲۹].

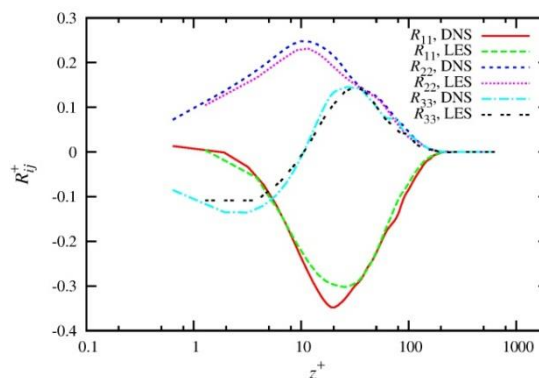
شکل ۲۴ نشان‌دهنده مؤلفه‌های قطر اصلی تانسور R_{ij} برای جریان در عدد رینولدز $Re_{\theta} = 303$ است. مؤلفه R_{11} منفی است که نشان می‌دهد این مؤلفه مسئول گرفتن انرژی جنبشی از نوسان‌های سرعت در جهت اصلی جریان و در نتیجه مسئول کاهش u_{rms} است. دو مؤلفه دیگر همه‌جا مثبت هستند. تنها استثنا رفتار R_{33} در محدوده بسیار نزدیک به دیوار است که مقدار منفی دارد و با فاصله گرفتن از دیوار به سرعت مثبت

سپاسگزاری

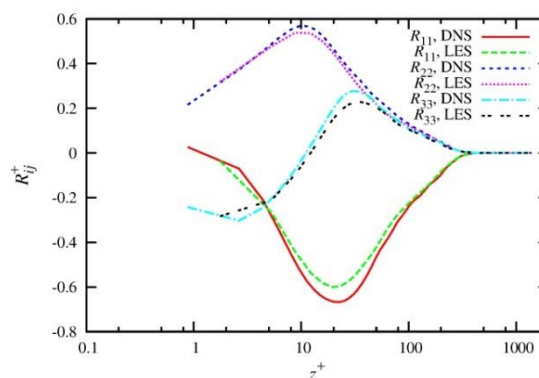
نویسنده از دانشگاه یاسوج و دانشگاه صنعتی اصفهان به خاطر فراهم آوردن امکانات محاسباتی و پردازش موازی تقدیر و تشکر می‌نماید.

مراجع

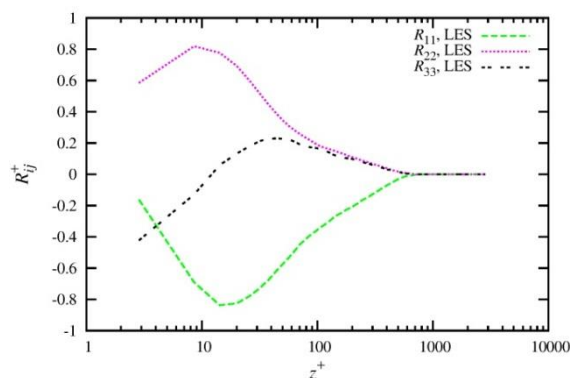
- [1] Moin P, Mahesh K. Direct numerical simulation: a tool in turbulence research. Annual Review of Fluid Mechanics. 1998;30:539-578.
- [2] Reynolds WC. Computation of turbulent flows. Annu. Rev. Fluid Mechanics. 1976;8:183-208.
- [3] Rogallo RS, Moin P. Numerical simulation of turbulent flows. Annual Review of Fluid Mechanics. 1984;16:99-137.
- [4] Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. monthly weather review. 1963;91:99-164.
- [5] Germano M, Piomelli U, Moin P, Cabot WH. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. Phys. Fluids A. 1991;3:1760-1765.
- [6] Meneveau C, Lund TS, Cabot WH. A Lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence. Journal of Fluid Mechanics. 1996;319:353-385.
- [7] Nicoud F, Ducros F. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. Flow, Turbulence and Combustion. 1999;62: 183-200.
- [8] Lund TS, Wu X, Squires KD. Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations. Journal of Computational Physics. 1998;140:233-58.
- [9] Manhart MA. zonal grid algorithm for DNS of turbulent boundary layers. Computers and Fluids. 2004; 33:435-61.
- [10] Inoue M, Pullin DI. Large-eddy simulation of the zero-pressure gradient turbulent boundary layer up to $Re_\theta = O(10^{12})$. Journal of Fluid Mechanics. 2011;686:507-33.
- [11] Inoue M, Pullin DI, Harun Z, Marusic I. LES of the adverse-pressure gradient turbulent boundary layer. International Journal of Heat and Fluid Flow. 2013;44:293-300.
- [12] Cheng W, Pullin DI, Samtaney R. Large-eddy simulation of separation and reattachment of a flat plate turbulent boundary layer. Journal of Fluid Mechanics. 2015;785:78-108.
- [13] Arollaa SK, Durbin PA. LES of spatially developing turbulent boundary layer over a concave surface. Journal of Turbulence. 2015;16:81-99.
- [14] Radhakrishnan S, Calafell J, Miró A, Font B, Lehmkuhl O. Data-driven wall modeling for LES involving non-equilibrium boundary layer effects. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid. 2024;34: 3166-202.



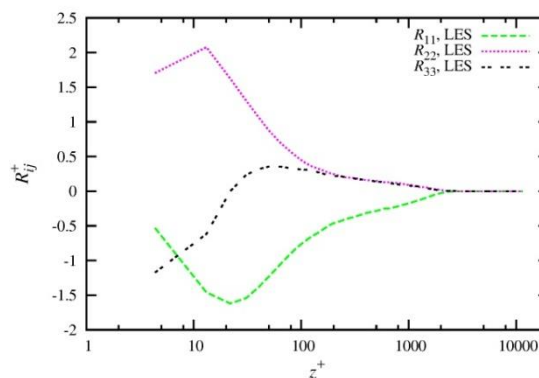
شکل ۲۴. همبستگی بین فشار و نرخ کرنش در $Re_\theta = 303$



شکل ۲۵. همبستگی بین فشار و نرخ کرنش در $Re_\theta = 678$



شکل ۲۶. همبستگی بین فشار و نرخ کرنش در $Re_\theta = 1408$



شکل ۲۷. همبستگی بین فشار و نرخ کرنش در $Re_\theta = 6930$

پی‌نوشت‌ها

1. Multigrid
2. Sweep
3. Ejection

- [15] Lilly DK. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Physics Fluids A*. 1992;4:633-5.
- [16] Piomelli U, Cabot W H, Moin P, Lee S. Subgrid-scale backscatter in turbulent and transitional flows. *Physics Fluids A*. 1991;3:1766-71.
- [17] Spalart PR. Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 1410$. *Journal of Fluid Mechanics*. 1988;187:61-98.
- [18] Williamson JH. Low-storage Runge-Kutta schemes. *Journal of Computational Physics*. 1980;35:48-56.
- [19] Chorin AJ. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*. 1968;22:745-62.
- [20] Temam R. Sur l'approximation de la solution des equations de Navier-Stokes par la method des pas fractionnaires. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1969;33:377-85.
- [21] Stone HL. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1968; 5:530-58.
- [22] Fernholz HH, Finley PJ. The incompressible zero-pressure-gradient turbulent boundary layer: an assessment of the data. *Progress in Aerospace Sciences*. 1996;32:245-311.
- [23] Roach PE, Brierley DH. The influence of a turbulent freestream on zero pressure gradient transitional boundary layer development including the condition test cases T3A and T3B. in *Numerical Simulation of Unsteady Flows and Transition to Turbulence* (eds. Pironneau O. et al.), Cambridge University Press, 1989.
- [24] Purtell LP, Klebanoff PS, Buckley FT. Turbulent boundary layers at low Reynolds numbers. *Physics of Fluids*. 1981;24:802-11.
- [25] Erm LP, Joubert PN. Low Reynolds-number turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*. 1991; 230:1-44.
- [26] Bruns J, Dengel P, Fernholz HH. Mean flow and turbulence measurements in an incompressible two-dimensional turbulent boundary layer. Part I: data. *Institutsbericht Nr. 02/92*, Hermann-Föttinger-Institut für Thermo- und Fluidodynamik, Technische Universität Berlin, 1992.
- [27] Hickel S, Adams NA, Implicit LES applied to zero-pressure-gradient and adverse-pressure-gradient boundary-layer turbulence. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2008;29:626-39.
- [28] Pope SB. *Turbulent Flows*. 1st ed, Cambridge University Press; 2000.
- [29] Kim J. On the structure of pressure fluctuations in simulated turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1989;205:421-51.